Operadores en el espacio de Kalton-Peck

Raúl Pino Velasco
raul.pino@uca.es
rpinovel@alumnos.unex.es

Universidad de Extremadura
Universidad de Cádiz

El Problema de Palais

¿Existe un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ *no isomorfo a un espacio de Hilbert tal que:*

(a) *X contiene un (subespacio isomorfo a un) espacio de Hilbert H*

(b) *X/H es (isomorfo a) un espacio de Hilbert H′?*

El Problema de Palais

¿Existe un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ no isomorfo a un espacio de Hilbert tal que:

(a) X contiene un (subespacio isomorfo a un) espacio de Hilbert H

(b) X/H es (isomorfo a) un espacio de Hilbert H'?

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow X \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

En este caso, X se denomina una suma torcida de espacios de Hilbert.

El Problema de Palais

¿Existe un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ no isomorfo a un espacio de Hilbert tal que:

(a) X contiene un (subespacio isomorfo a un) espacio de Hilbert H

(b) X/H es (isomorfo a) un espacio de Hilbert H'?

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow X \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

En este caso, X se denomina una suma torcida de espacios de Hilbert.

Enflo, P., Lindenstrauss, J., y Pisier, G., *On the "three-space problem"*, Math. Scand. **36** (1975), 199–210.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Z es *suma torcida de X e Y* si existe
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$
siendo j la inclusión y q la correspondiente aplicación cociente.

Dar una *respuesta afirmativa* al Problema de Palais equivale a construir una suma torcida (no trivial) de espacios de Hilbert.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Z es *suma torcida de X e Y* si existe

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$

siendo j la inclusión y q la correspondiente aplicación cociente.

Dar una *respuesta afirmativa* al Problema de Palais equivale a construir una suma torcida (no trivial) de espacios de Hilbert.

¿Cómo construir sumas torcidas de espacios de Hilbert?

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(a) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(b) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(*a*) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(*b*) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

Teorema de Kalton: Aplicaciones quasi-lineales & sumas torcidas

(*a*) Si $F\colon Y \longrightarrow X$ es una aplicación quasi-lineal, $Z = X \oplus_F Y$ es una suma torcida de X e Y.

(*b*) Si Z es una suma torcida de X e Y, existe una aplicación quasi-lineal $F\colon Y \longrightarrow X$ tal que Z es equivalente a $X \oplus_F Y$.

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(a) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(b) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

"$\Longrightarrow$"

$$X \oplus_F Y := \{(x, y) \in X \times Y \colon \|x - F(y)\|_X + \|y\|_Y < \infty\}$$

"$\Longleftarrow$"

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

$$F := j^{-1}(\theta - \varphi),$$

siendo $\theta : Y \to Z$ sección acotada y homogénea y $\varphi : Y \to Z$ sección lineal.

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(*a*) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(*b*) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

Una quasi-lineal $F : Y \to X$ es trivial si $F = L + B$ con L aplicación lineal y B acotada

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(a) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(b) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que
$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

Una quasi-lineal $F : Y \to X$ es trivial si $F = L + B$ con L aplicación lineal y B acotada

$$\|B(x)\|_X \leq C\|x\|_Y$$

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(a) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(b) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

Una quasi-lineal $F : Y \to X$ es trivial si $F = L + B$ con L aplicación lineal y B acotada

Una aplicación quasi-lineal F es trivial si y sólo si

$$X \oplus_F Y := \{(x, y) \in X \times Y \colon \|x - F(y)\|_X + \|y\|_Y < \infty\} \equiv X \oplus Y$$

Sumas torcidas de espacios Banach
Aplicaciones quasi-lineales

$F\colon Y \longrightarrow X$ es *quasi-lineal* si:

(a) $F(t\,y) = t\,F(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$;

(b) existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|).$$

¿Cómo construir aplicaciones quasi-lineales?

El espacio de Banach Z_2

Kalton-Peck, 1981

En ciertos espacios de sucesiones X con base incondicional (más alguna hipótesis no muy restrictiva) se tiene que

$$KP_\varphi\big((x_n)_n\big) = \Big(x_n\,\varphi(-\log\frac{|x_n|}{\|x\|})\Big)_n$$

es quasi-lineal, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitz

El espacio de Banach Z_2

Kalton-Peck, 1981

En ciertos espacios de sucesiones X con base incondicional (más alguna hipótesis no muy restrictiva) se tiene que

$$KP_\varphi((x_n)_n) = \left(x_n\, \varphi(-\log \frac{|x_n|}{\|x\|})\right)_n$$

es quasi-lineal, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitz

Trivialidad de aplicaciones de Kalton-Peck

La aplicación quasi-lineal

$$KP_\varphi((x_n)_n) = \left(x_n\, \varphi(-\log \frac{|x_n|}{\|x\|})\right)_n$$

es trivial si y sólo si φ es acotada

El espacio de Banach Z_2

Kalton-Peck, 1981

En ciertos espacios de sucesiones X con base incondicional (más alguna hipótesis no muy restrictiva) se tiene que

$$KP_\varphi((x_n)_n) = \left(x_n\,\varphi(-\log \frac{|x_n|}{\|x\|})\right)_n$$

es quasi-lineal, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitz

Trivialidad de aplicaciones de Kalton-Peck

La aplicación quasi-lineal

$$KP_\varphi((x_n)_n) = \left(x_n\,\varphi(-\log \frac{|x_n|}{\|x\|})\right)_n$$

es trivial si y sólo si φ es acotada

Z_2 es la suma torcida de ℓ_2 definida por $\varphi(t) = t$

El espacio de Banach Z_2

Z_2 es la suma torcida de ℓ_2 definida por $\varphi(t) = t$

El espacio de Banach Z_2

Z_2 es la suma torcida de ℓ_2 definida por $\varphi(t) = t$

Compleción de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ respecto de la quasi-norma dada por

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \|x - KP(y)\|_2 + \|y\|_2 \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(x_n - y_n \log\frac{|y_n|}{\|y\|_2}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \|y\|_2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty.\end{aligned}$$

El espacio de Banach Z_2

Z_2 es la suma torcida de ℓ_2 definida por $\varphi(t) = t$

Compleción de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ respecto de la quasi-norma dada por

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \|x - KP(y)\|_2 + \|y\|_2 \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(x_n - y_n \log \frac{|y_n|}{\|y\|_2}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \|y\|_2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty.\end{aligned}$$

El espacio de Banach Z_2 es una suma torcida no trivial de espacios de Hilbert llamada espacio de Kalton-Peck.

La aplicación quasi-lineal definida como

$$\mathrm{KP}(y) = \sum_n y_n \log\Big(\frac{|y_n|}{\|y\|_2}\Big) e_n, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}^\infty,$$

se denomina aplicación de Kalton-Peck.

Operadores en $\mathbf{Z_2}$

La sucesión exacta asociada a Z_2

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

$q\colon Z_2 \longrightarrow \ell_p$ es estrictamente singular

$j\colon \ell_p \longrightarrow Z_2$ es estrictamente cosingular

Operadores en $\mathbf{Z_2}$

La sucesión exacta asociada a Z_2

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

$q\colon Z_2 \longrightarrow \ell_p$ es estrictamente singular

$j\colon \ell_p \longrightarrow Z_2$ es estrictamente cosingular

El espacio $\mathcal{B}(Z_2, Z_2)$

Todo operador $T\colon Z_2 \longrightarrow Z_2$ es o bien estrictamente singular o bien un isomorfismo sobre una copia complementada del propio Z_2.

Z_2 no tiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_2

Z_2 no tiene subespacios complementados de dimensión infinita con base incondicional

Operadores en $\mathbf{Z_2}$

La sucesión exacta asociada a Z_2

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

$q\colon Z_2 \longrightarrow \ell_p$ es estrictamente singular

$j\colon \ell_p \longrightarrow Z_2$ es estrictamente cosingular

El espacio $\mathcal{B}(Z_2, Z_2)$

Todo operador $T\colon Z_2 \longrightarrow Z_2$ es o bien estrictamente singular o bien un isomorfismo sobre una copia complementada del propio Z_2.

El espacio $\mathcal{B}(Z_2, X)$

Dado cualquier espacio de Banach X, todo operador $T\colon Z_2 \longrightarrow X$ es o bien estrictamente singular o bien un isomorfismo sobre una copia complementada de Z_2

Z_2 e interpolación compleja

Teorema de Riesz-Thorin

Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador tal que

(1) $T : \ell_{p_0} \to \ell_{p_0}$ es acotado con norma M_0;

(2) $T : \ell_{p_1} \to \ell_{p_1}$ es acotado con norma M_1.

Entonces $T : \ell_p \to \ell_p$ es acotado para

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 1$$

y norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Z_2 e interpolación compleja

Teorema de Riesz-Thorin

Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador tal que

(1) $T : \ell_{p_0} \to \ell_{p_0}$ es acotado con norma M_0;

(2) $T : \ell_{p_1} \to \ell_{p_1}$ es acotado con norma M_1.

Entonces $T : \ell_p \to \ell_p$ es acotado para

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 1$$

y norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

En general, $T : L_{p_0}(U, d\mu) \to L_{q_0}(V, d\nu)$ y $T : L_{p_1}(U, d\mu) \to L_{q_1}(V, d\nu)$ con $p_0 \neq p_1$ y $q_0 \neq q_1$

Abstracción del Teorema de Riesz-Thorin

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty, \quad \text{si } 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Dados dos espacios de Banach X e Y, construir espacios *intermediarios* Z:

$$X \cap Y \subset Z \subset X + Y.$$

Si $T : X \to X$ y $T : Y \to Y$ son acotados, entonces

$$T : Z \to Z \text{ es acotado.}$$

Un par de espacios de Banach (X_0, X_1) se dice compatible si ambos se pueden embeber en un mismo espacio vectorial topológico Hausdorff W

¿Cómo construir tales espacios interpolados?

Interpolación compleja

Espacio de Calderón

Dado un par compatible (X_0, X_1), se define el *espacio de Calderón* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X_0, X_1)$ como el espacio formado por las funciones $f : \mathbb{S} \to \Sigma := X_0 + X_1$ tales que:

$$\|x\|_\Sigma = \inf_{x = x_0 + x_1} \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}$$

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leq Re(z) \leq 1\}$$

Interpolación compleja

Espacio de Calderón

Dado un par compatible (X_0, X_1), se define el *espacio de Calderón* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X_0, X_1)$ como el espacio formado por las funciones $f : \mathbb{S} \to \Sigma := X_0 + X_1$ tales que:

(1) f es $\|\cdot\|_\Sigma$-acotada y $\|\cdot\|_\Sigma$-continua en $\mathbb{S}$ y $\|\cdot\|_\Sigma$-analítica en $\mathbb{S}^\circ$;

Interpolación compleja

Espacio de Calderón

Dado un par compatible (X_0, X_1), se define el *espacio de Calderón* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X_0, X_1)$ como el espacio formado por las funciones $f : \mathbb{S} \to \Sigma := X_0 + X_1$ tales que:

(1) f es $\|\cdot\|_\Sigma$-acotada y $\|\cdot\|_\Sigma$-continua en $\mathbb{S}$ y $\|\cdot\|_\Sigma$-analítica en $\mathbb{S}^\circ$;

(2) $f(it) \in X_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto f(it) \in X_0$ es acotada y continua;

(3) $f(1 + it) \in X_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto f(1 + it) \in X_1$ es acotada y continua.

Interpolación compleja

Espacio de Calderón

Dado un par compatible (X_0, X_1), se define el *espacio de Calderón* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X_0, X_1)$ como el espacio formado por las funciones $f : \mathbb{S} \to \Sigma := X_0 + X_1$ tales que:

(1) f es $\|\cdot\|_\Sigma$-acotada y $\|\cdot\|_\Sigma$-continua en $\mathbb{S}$ y $\|\cdot\|_\Sigma$-analítica en $\mathbb{S}^\circ$;

(2) $f(it) \in X_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto f(it) \in X_0$ es acotada y continua;

(3) $f(1+it) \in X_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto f(1+it) \in X_1$ es acotada y continua.

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \|f(j+it)\|_{X_j},\ \text{con } j = 0, 1 \right\}$$

Interpolación compleja

Operadores naturales

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ tenemos un operador $\delta_\theta : \mathcal{H} \to \Sigma$ dado por la evaluación:

$$f \in \mathcal{H} \mapsto \delta_\theta(f) = f(\theta) \in \Sigma$$

Interpolación compleja

Operadores naturales

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ tenemos un operador $\delta_\theta : \mathcal{H} \to \Sigma$ dado por la evaluación:

$$f \in \mathcal{H} \mapsto \delta_\theta(f) = f(\theta) \in \Sigma$$

Espacios interpolados I

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ se define

$$(X_0, X_1)_\theta = X_\theta = \{x \in \Sigma \colon x = f(\theta), \text{ para algún } f \in \mathcal{H}\}$$

dotado de la norma

$$\|x\|_{X_\theta} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{H}} \colon f(\theta) = x\}$$

Interpolación compleja

Operadores naturales

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ tenemos un operador $\delta_\theta : \mathcal{H} \to \Sigma$ dado por la evaluación:

$$f \in \mathcal{H} \mapsto \delta_\theta(f) = f(\theta) \in \Sigma$$

Espacios interpolados I

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ se define

$$(X_0, X_1)_\theta = X_\theta = \{x \in \Sigma \colon x = f(\theta), \text{ para algún } f \in \mathcal{H}\}$$

dotado de la norma

$$\|x\|_{X_\theta} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{H}} \colon f(\theta) = x\}$$

Espacios interpolados II

$$X_\theta = \delta_\theta(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{H}/ker(\delta_\theta)$$

Interpolación compleja

Operadores naturales

Espacios interpolados I

Espacios interpolados II

Espacios interpolados III

(1) $X_0 \cap X_1 \subset X_{\theta_1} \subset X_{\theta_2} \subset X_0 + X_1, \quad$ si $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$

(2) $T : X_\theta \to X_\theta$ siempre que $T : X_0 \to X_0$ y $T : X_1 \to X_1$

Interpolación compleja

Operadores naturales

Espacios interpolados I

Espacios interpolados II

Espacios interpolados III

Riesz-Thorin-Calderón

Dado el par compatible (ℓ_1, ℓ_∞) y $\theta \in [0, 1]$ se tiene que

$$(\ell_1, \ell_\infty)_\theta = \ell_p, \quad \text{con } \frac{1}{p} = 1 - \theta$$

Z_2 como espacio derivado

Operadores derivada

Puesto que $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ un espacio de funciones analíticas, *podemos hablar de derivadas*. Así está definido el operador $\delta'_\theta : \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \to \Sigma = \ell_\infty$ dado por

$$f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \mapsto f'(\theta) \in \Sigma = \ell_\infty$$

Z_2 como espacio derivado

Operadores derivada

Puesto que $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ un espacio de funciones analíticas, *podemos hablar de derivadas*. Así está definido el operador $\delta'_\theta : \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \to \Sigma = \ell_\infty$ dado por

$$f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \mapsto f'(\theta) \in \Sigma = \ell_\infty$$

$$0 \longrightarrow ker(\delta_{1/2}) \longrightarrow \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \stackrel{\delta_{1/2}}{\longrightarrow} \ell_2 \longrightarrow 0$$

Z_2 como espacio derivado

Operadores derivada

Puesto que $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ un espacio de funciones analíticas, *podemos hablar de derivadas*. Así está definido el operador $\delta'_\theta : \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \to \Sigma = \ell_\infty$ dado por

$$f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \mapsto f'(\theta) \in \Sigma = \ell_\infty$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ker(\delta_{1/2}) \arrow[r] & \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\delta'_{1/2}"'] & \ell_2 \arrow[r] & 0 \\ & & \ell_\infty & & \end{tikzcd}$$

Z_2 como espacio derivado

Operadores derivada

Puesto que $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ un espacio de funciones analíticas, *podemos hablar de derivadas*. Así está definido el operador $\delta'_\theta : \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \to \Sigma = \ell_\infty$ dado por

$$f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \mapsto f'(\theta) \in \Sigma = \ell_\infty$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker(\delta_{1/2}) \arrow[r] & \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\delta'_{1/2}"'] & \ell_2 \arrow[r] \arrow[l, bend right, "B_{1/2}"'] & 0 \\
& & \ell_\infty & &
\end{tikzcd}$$

$B_{1/2}$ sección de $\delta_{1/2}$ acotada y homogénea

Z_2 como espacio derivado

Operadores derivada

Puesto que $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ un espacio de funciones analíticas, *podemos hablar de derivadas*. Así está definido el operador $\delta'_\theta : \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \to \Sigma = \ell_\infty$ dado por

$$f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \mapsto f'(\theta) \in \Sigma = \ell_\infty$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker(\delta_{1/2}) \arrow[r] & \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\delta'_{1/2}"'] & \ell_2 \arrow[r] \arrow[l, bend right, "B_{1/2}"'] \arrow[dl, bend left, "\Omega_{1/2}"] & 0 \\
 & & \ell_\infty & &
\end{tikzcd}$$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial

La aplicación $\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} : \ell_2 \to \ell_\infty$ se denomina aplicación diferencial de la escala en $1/2$

Teorema de correspondencia

La diferencial $\Omega_{1/2}$ es quasi-lineal y el espacio

$$d_{\Omega_{1/2}} = \{(x, y) \in \ell_\infty \times \ell_2 \colon x - \Omega_{1/2} y \in \ell_2\}$$

es isomorfo a una suma torcida de espacios de Hilbert.

Tal espacio se denomina espacio derivado (en $1/2$).

$$\|(x, y)\| = \|x - \Omega_{1/2} y\|_{\ell_2} + \|y\|_{\ell_2}$$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial en ℓ_2

$$\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} : \ell_2 \to \ell_\infty$$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial en ℓ_2

$$\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} : \ell_2 \to \ell_\infty$$

Sección acotada y homogénea

La aplicación $B_{1/2} : \ell_2 \to \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ dada por

$$x \in \ell_2 \mapsto B_{1/2}(x) = f_x,$$

donde

$$f_x(z) = \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k$$

es sección acotada y homogénea de $\delta_{1/2}$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial en ℓ_2

$$\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} = f'_x(1/2) = \left(\sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k \right)'_{|_{1/2}}$$

Sección acotada y homogénea

$$f_x(z) = \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k$$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial en ℓ_2

$$\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} = f'_x(1/2) = \left(\sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k \right)'_{\big|_{1/2}}$$

$$= \left(2 \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \log \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right) \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k \right)_{\big|_{z=1/2}}$$

Sección acotada y homogénea

$$f_x(z) = \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k$$

Z_2 como espacio derivado

La aplicación diferencial en ℓ_2

$$\Omega_{1/2} = \delta'_{1/2} B_{1/2} = f'_x(1/2) = \left(\sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k \right)'_{\big|_{1/2}}$$

$$= \left(2 \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \log \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right) \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k \right)_{\big|_{z=1/2}}$$

$$= 2 \sum_k x_k \log \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right) e_k = 2\, KP(x)$$

Sección acotada y homogénea

$$f_x(z) = \sum_k \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{\ell_2}} \right)^{2z} \|x\|_{\ell_2} \frac{x_k}{|x_k|} e_k$$

Z_2 como espacio derivado

Ejemplo: la escala de los ℓ_p y Z_2

En la escala de los espacios ℓ_p se tiene que

$$\Omega_{1/2} = 2\,KP$$

y por tanto

$$d_{\Omega_{1/2}} = \{(x, y) \in \ell_\infty \times \ell_2 \colon x - 2KP(y) \in \ell_2\} = Z_2$$

Z_2 como espacio derivado

Ejemplo: la escala de los ℓ_p y Z_2

En la escala de los espacios ℓ_p se tiene que

$$\Omega_{1/2} = 2\,KP$$

y por tanto

$$d_{\Omega_{1/2}} = \{(x,y) \in \ell_\infty \times \ell_2 \colon x - 2KP(y) \in \ell_2\} = Z_2$$

Conclusión: Norma explícita en Z_2

$$\|(x,y)\|_d = \inf\{\|f\|_{\mathcal{H}(\ell_1,\ell_\infty)} \colon x = f'(1/2),\ y = f(1/2)\}$$

es una norma en Z_2

Teorema del Conmutador

Un operador $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ se dice que actúa en la escala de los espacios ℓ_p si $\tau(\ell_1) \subset \ell_1$.

Teorema del Conmutador

Un operador $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ se dice que actúa en la escala de los espacios ℓ_p si $\tau(\ell_1) \subset \ell_1$.

Teorema del Conmutador

Si $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ actúa en la escala entonces el operador

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

dado por $T(x, y) = (\tau x, \tau y)$ es acotado en Z_2

Teorema del Conmutador

Teorema del Conmutador

Si $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ actúa en la escala entonces el operador

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

dado por $T(x,y) = (\tau x, \tau y)$ es acotado en Z_2

$$\|T(x,y)\| = \|\tau x - KP(\tau y)\|_2 + \|\tau y\|_2$$

Teorema del Conmutador

Teorema del Conmutador

Si $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ actúa en la escala entonces el operador

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

dado por $T(x,y) = (\tau x, \tau y)$ es acotado en Z_2

$$\|T(x,y)\| \leq \|\tau x - \tau KP(y)\|_2 + \|\tau KP(y) - KP(\tau y)\|_2 + \|\tau y\|_2$$

Teorema del Conmutador

Teorema del Conmutador

Si $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ actúa en la escala entonces el operador

$$T = \begin{pmatrix} \tau & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

dado por $T(x, y) = (\tau x, \tau y)$ es acotado en Z_2

$$\|\tau KP(y) - KP(\tau y)\|_2 \leq C\|y\|_2$$

Es suficiente que el operador τ se acotado solamente en los espacios ℓ_p y ℓ_{p^*} con $p < 2$

Ejemplos de operadores en Z_2

Ejemplos diagonales

(1) El shift unilateral S_+ y su adjunto S_- actúan en la escala:

$$\begin{pmatrix} S_+ & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & S_+ \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} S_- & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & S_- \end{pmatrix}$$

son acotados en Z_2

Ejemplos de operadores en Z_2

Ejemplos diagonales

(1) El shift unilateral S_+ y su adjunto S_- actúan en la escala:

$$\begin{pmatrix} S_+ & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & S_+ \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} S_- & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & S_- \end{pmatrix}$$

son acotados en Z_2

(2) El operador de Cesàro C dado por

$$C\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

es acotado en ℓ_p si $p > 1$. Luego

$$\begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}$$

es acotado en Z_2

Ejemplos de operadores en Z_2

Construcción triangulares

Si τ es un operador que actúe en la escala y $T : \ell_2 \to \ell_2$ es cualquier operador, entonces

$$\begin{pmatrix} \tau & T \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

es acotado en Z_2

Ejemplos de operadores en Z_2

Construcción triangulares

Si τ es un operador que actúe en la escala y $T : \ell_2 \to \ell_2$ es cualquier operador, entonces

$$\begin{pmatrix} \tau & T \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

es acotado en Z_2

Ejemplos triangulares

$$\begin{pmatrix} S_+ & S_+ \\ \mathcal{O} & S_+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C & -I \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{O} & C^4 \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Ejemplos de operadores en Z_2

Construcción triangulares

Si τ es un operador que actúe en la escala y $T : \ell_2 \to \ell_2$ es cualquier operador, entonces

$$\begin{pmatrix} \tau & T \\ \mathcal{O} & \tau \end{pmatrix}$$

es acotado en Z_2

Triangulares invertibles

Si $T : \ell_2 \to \ell_2$ es cualquier operador, entonces

$$\begin{pmatrix} I & T \\ \mathcal{O} & I \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo en Z_2

Conmutante del operador C_2

Problema

Estudiar el conmutante de
$$C_2 = \begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix},$$
el operador de Cesàro inducido en Z_2

Conmutante del operador C_2

Problema

Estudiar el conmutante de

$$C_2 = \begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix},$$

el operador de Cesàro inducido en Z_2

$$Conm(C_2) = \{T : Z_2 \to Z_2 \colon TC_2 = C_2 T\}$$

Conmutante del operador C_2

Problema

Estudiar el conmutante de

$$C_2 = \begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix},$$

el operador de Cesàro inducido en Z_2

$Conm(C)$ en ℓ_2: Shields-Wallen-Halmos, 1971

(1) $Conm(C)$ se puede identificar con $H^\infty(\mathbb{D})$, el álgebra de funciones analíticas acotadas en el disco unidad;

(2) $Conm(C)$ coincide con la clausura en WOT de

$$a(C) = \{\alpha_0 I + \alpha_1 C + \cdots + \alpha_n C^n \colon n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{C}\},$$

el álgebra generada por C y la identidad.

Conmutante del operador C_2

Idea

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\ell_2 \arrow[r, "I-C"] \arrow[d, "U"'] & \ell_2 \arrow[d, "U"] \\
H \arrow[r, "M_s"'] & H
\end{tikzcd}$$

$$M_s(f)(z) = z\, f(z), \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D}$$

$$Conm(M_s) = H^\infty(\mathbb{D})$$

Shields, A.L., Wallen L.J. y Halmos, P.R., *The Commutants of Certain Hilbert Space Operators*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 777–788.

Conmutante del operador C_2

Resultados parciales

(1) Si $T : \ell_2 \to \ell_2 \in Conm(C)$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} : Z_2 \to Z_2$$

conmuta con C_2.

Conmutante del operador C_2

Resultados parciales

(1) Si $T : \ell_2 \to \ell_2 \in Conm(C)$, entonces
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} : Z_2 \to Z_2$$
conmuta con C_2.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & TC \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & CT \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Conmutante del operador C_2

Resultados parciales

(1) Si $T : \ell_2 \to \ell_2 \in Conm(C)$, entonces
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} : Z_2 \to Z_2$$
conmuta con C_2.

Si $T, L \in Conm(C)$ y L actúa en la escala de los espacios ℓ_p
$$\begin{pmatrix} L & T \\ \mathcal{O} & L \end{pmatrix} : Z_2 \to Z_2$$
conmuta con C_2

Conmutante del operador C_2

Resultados parciales

(2) $a(C_2) \subsetneq Conm(C_2)$: el operador

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & T \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

con $T \in Conm(C)$ no es límite en $(\mathcal{B}(Z_2), WOT)$ de ninguna sucesión

$$\begin{pmatrix} P_n(C) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & P_n(C) \end{pmatrix},$$

donde $P_n(C)$ son polinomios en el operador de Cesàro

Problemas

Conjetura I

El límite en WOT de una sucesión de operadores en ℓ_2 que actúan en la escala de los ℓ_p también actúa en (un entorno de) la escala

Problemas

Conjetura I

El límite en WOT de una sucesión de operadores en ℓ_2 que actúan en la escala de los ℓ_p también actúa en (un entorno de) la escala

Consecuencia

Todo operador $T \in Conm(C) = a(C)$ induce un operador

$$\begin{pmatrix} T & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & T \end{pmatrix} \in Conm(C_2)$$

de modo que $Conm(C)$ se embebe linealmente en $Conm(C_2)$

Problemas

Conjetura I

El límite en WOT de una sucesión de operadores en ℓ_2 que actúan en la escala de los ℓ_p también actúa en (un entorno de) la escala

Consecuencia

Todo operador $T \in Conm(C) = a(C)$ induce un operador

$$\begin{pmatrix} T & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & T \end{pmatrix} \in Conm(C_2)$$

de modo que $Conm(C)$ se embebe linealmente en $Conm(C_2)$

¿Es cierto siquiera para convergencia en $(\mathcal{B}(\ell_2), SOT)$ o $(\mathcal{B}(\ell_2), \|\cdot\|)$?

Problemas

Conjetura I

El límite en WOT de una sucesión de operadores en ℓ_2 que actúan en la escala de los ℓ_p también actúa en (un entorno de) la escala

Conjetura II

Todo operador en $Conm(C_2)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} L & T \\ \mathcal{O} & L \end{pmatrix} \in Conm(C_2),$$

donde $T, L \in Conm(C)$ y L actúa en la escala de los ℓ_p