Integrabilidad de distribuciones y sistemas de Pfaff

Beltrán de la Flor Gandarillas

16/10/2021

Contenido

1. Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$
   - Curvas integrales en forma explícita, implícita o paramétrica
   - Teorema de rectificación de campos
   - Problema geométrico y problema algebraico.
2. Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$
3. Integración de dos campos en $\mathbb{R}^3$
   - Caracterizaciones de la integrabilidad de un campo de planos
   - Sistemas de Pfaff e integración.
4. Integrabilidad de k-campos en $\mathbb{R}^n$

Introducción

- Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión finita, podemos calcular el espacio vectorial tangente a M en cada uno de sus puntos.
- Si a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le hacemos corresponder un espacio vectorial de dimensión k, ¿podemos encontrar una variedad M cuyos espacios tangentes en cada punto sean precisamente los anteriores?
- Comenzaremos integrando un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, y daremos los pasos necesarios para la generalización a dimensiones superiores.

Introducción

- Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión finita, podemos calcular el espacio vectorial tangente a M en cada uno de sus puntos.
- Si a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le hacemos corresponder un espacio vectorial de dimensión k, ¿podemos encontrar una variedad M cuyos espacios tangentes en cada punto sean precisamente los anteriores?
- Comenzaremos integrando un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, y daremos los pasos necesarios para la generalización a dimensiones superiores.

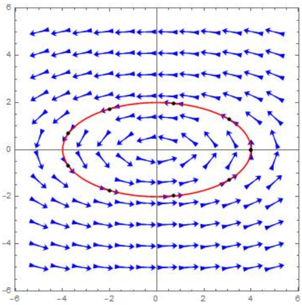
Introducción

- Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión finita, podemos calcular el espacio vectorial tangente a M en cada uno de sus puntos.
- Si a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le hacemos corresponder un espacio vectorial de dimensión k, ¿podemos encontrar una variedad M cuyos espacios tangentes en cada punto sean precisamente los anteriores?
- Comenzaremos integrando un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, y daremos los pasos necesarios para la generalización a dimensiones superiores.

Curvas integrales en forma explícita

Sea $X = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, y $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable. Sea un punto $p = (x_0, y_0) \in U$.

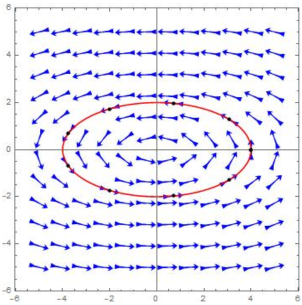
- $p \in \gamma$ y $X(q) \in T(\gamma, q)$, para cada $q \in U_0 \cap \gamma$.
- $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, y(x_0) = y_0$ si $Q(x_0, y_0) \neq 0$. (1)
- $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, x(y_0) = x_0$ si $P(x_0, y_0) \neq 0$. (2)
- Las gráficas de las soluciones de (1) o (2) son, localmente, curvas integrales del campo X y viceversa.



Curvas integrales en forma explícita

Sea $X = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, y $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable. Sea un punto $p = (x_0, y_0) \in U$.

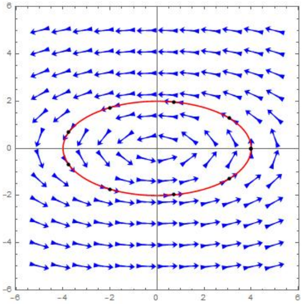
- $p \in \gamma$ y $X(q) \in T(\gamma, q)$, para cada $q \in U_0 \cap \gamma$.
- $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, y(x_0) = y_0$ si $Q(x_0, y_0) \neq 0$. (1)
- $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, x(y_0) = x_0$ si $P(x_0, y_0) \neq 0$. (2)
- Las gráficas de las soluciones de (1) o (2) son, localmente, curvas integrales del campo X y viceversa.



Curvas integrales en forma explícita

Sea $X = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, y $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable. Sea un punto $p = (x_0, y_0) \in U$.

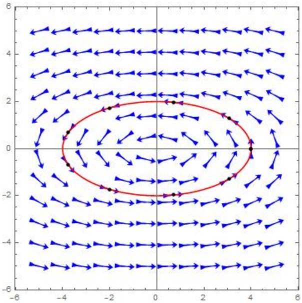
- $p \in \gamma$ y $X(q) \in T(\gamma, q)$, para cada $q \in U_0 \cap \gamma$.
- $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, y(x_0) = y_0$ si $Q(x_0, y_0) \neq 0$. (1)
- $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, x(y_0) = x_0$ si $P(x_0, y_0) \neq 0$. (2)
- Las gráficas de las soluciones de (1) o (2) son, localmente, curvas integrales del campo X y viceversa.



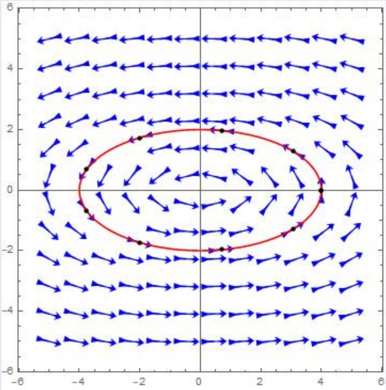
Curvas integrales en forma explícita

Sea $X = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, y $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable. Sea un punto $p = (x_0, y_0) \in U$.

- $p \in \gamma$ y $X(q) \in T(\gamma, q)$, para cada $q \in U_0 \cap \gamma$.
- $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, y(x_0) = y_0$ si $Q(x_0, y_0) \neq 0$. (1)
- $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, x(y_0) = x_0$ si $P(x_0, y_0) \neq 0$. (2)
- Las gráficas de las soluciones de (1) o (2) son, localmente, curvas integrales del campo X y viceversa.



Curvas integrales en forma explícita



$$X(x,y) = \left(-2y, \tfrac{x}{2}\right), \; y(x) = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2 - x^2}.$$

Curvas integrales en forma implícita e integrales primeras

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^r(U)$, $r \geq 1$, y no nulo en U. y $p = (x_0, y_0) \in U$.

- $H : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $H_x Q + H_y P = 0$.
- Si $H \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ es integral primera de X, con $H_x(p) \neq 0$ o $H_y(p) \neq 0$, $H(x, y) - H(x_0, y_0) = 0$ define implícitamente la solución de (1) o (2).
- Si $y = y(x)$ o $x = x(y)$ son soluciones de (1) o (2) definidas en I, entonces $H(x, y) = y - y(x)$, $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ o $H(x, y) = x - x(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times I$ son integrales primeras de X.
- Las integrales primeras de X son constantes sobre sus curvas integrales.

Curvas integrales en forma implícita e integrales primeras

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^r(U)$, $r \geq 1$, y no nulo en U. y $p = (x_0, y_0) \in U$.

- $H : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $H_x Q + H_y P = 0$.
- Si $H \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ es integral primera de X, con $H_x(p) \neq 0$ o $H_y(p) \neq 0$, $H(x, y) - H(x_0, y_0) = 0$ define implícitamente la solución de (1) o (2).
- Si $y = y(x)$ o $x = x(y)$ son soluciones de (1) o (2) definidas en I, entonces $H(x, y) = y - y(x)$, $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ o $H(x, y) = x - x(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times I$ son integrales primeras de X.
- Las integrales primeras de X son constantes sobre sus curvas integrales.

Curvas integrales en forma implícita e integrales primeras

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^r(U)$, $r \geq 1$, y no nulo en U. y $p = (x_0, y_0) \in U$.

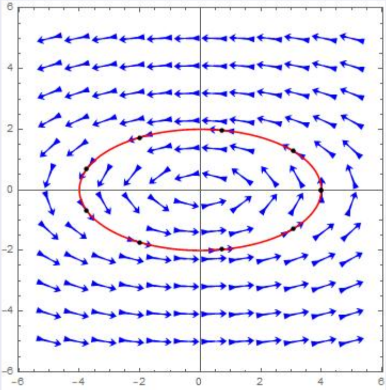
- $H : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $H_x Q + H_y P = 0$.
- Si $H \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ es integral primera de X, con $H_x(p) \neq 0$ o $H_y(p) \neq 0$, $H(x, y) - H(x_0, y_0) = 0$ define implícitamente la solución de (1) o (2).
- Si $y = y(x)$ o $x = x(y)$ son soluciones de (1) o (2) definidas en I, entonces $H(x, y) = y - y(x)$, $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ o $H(x, y) = x - x(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times I$ son integrales primeras de X.
- Las integrales primeras de X son constantes sobre sus curvas integrales.

Curvas integrales en forma implícita e integrales primeras

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^r(U)$, $r \geq 1$, y no nulo en U. y $p = (x_0, y_0) \in U$.

- $H : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $H_x Q + H_y P = 0$.
- Si $H \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ es integral primera de X, con $H_x(p) \neq 0$ o $H_y(p) \neq 0$, $H(x, y) - H(x_0, y_0) = 0$ define implícitamente la solución de (1) o (2).
- Si $y = y(x)$ o $x = x(y)$ son soluciones de (1) o (2) definidas en I, entonces $H(x, y) = y - y(x)$, $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ o $H(x, y) = x - x(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times I$ son integrales primeras de X.
- Las integrales primeras de X son constantes sobre sus curvas integrales.

Curvas integrales en forma implícita



$$H(x, y) - H(x_0, y_0) = 0, \text{ donde } H(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Curvas integrales en forma paramétrica

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^r$ y no nulo en U. Sean los puntos $p = (x_0, y_0) \in U$.

Sistema característico asociado

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma^1(t)}{dt} & = & Q(\sigma^1(t), \sigma^2(t)), \\ \dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} & = & P(\sigma^1(t), \sigma^2(t)), \\ \sigma(0) & = & (x_0, y_0). \end{cases}$$

La pareja (I_p, σ_p) es una representación paramétrica local de la curva integral del campo X que pasa por p, donde I_p es el entorno de 0 maximal en el que se define la solución σ_p del sistema anterior.

Curvas integrales en forma paramétrica

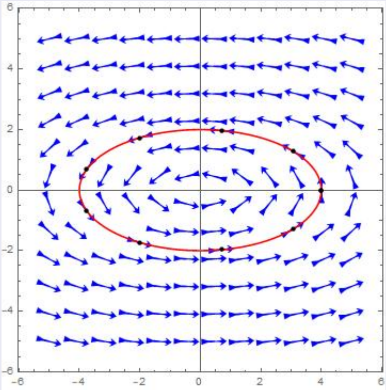
Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^r$ y no nulo en U. Sean los puntos $p = (x_0, y_0) \in U$.

Sistema característico asociado

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma^1(t)}{dt} & = & Q(\sigma^1(t), \sigma^2(t)), \\ \dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} & = & P(\sigma^1(t), \sigma^2(t)), \\ \sigma(0) & = & (x_0, y_0). \end{cases}$$

La pareja (I_p, σ_p) es una representación paramétrica local de la curva integral del campo X que pasa por p, donde I_p es el entorno de 0 maximal en el que se define la solución σ_p del sistema anterior.

Curvas integrales en forma paramétrica



$$\sigma_p(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -2\sin t \\ \frac{1}{2}\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \; I_p = \mathbb{R}.$$

Flujo del campo X

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^r$, no nulo en U.

Flujo

Para cada $p \in U$, consideramos (I_p, σ_p) como antes. Definimos el abierto $\mathcal{U} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y la aplicación flujo de X:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & U \\ & (t, p) & \longmapsto & \sigma_p(t). \end{array}$$

La aplicación anterior verifica, entre otras propiedades, que es diferenciable respecto de p y respecto de t.

Flujo del campo X

Sea $\mathrm{X} = (Q, P) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^r$, no nulo en U.

Flujo

Para cada $p \in U$, consideramos (I_p, σ_p) como antes. Definimos el abierto $\mathcal{U} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y la aplicación flujo de X:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{U} & \longrightarrow & U \\ & (t, p) & \longmapsto & \sigma_p(t). \end{array}$$

La aplicación anterior verifica, entre otras propiedades, que es diferenciable respecto de p y respecto de t.

Teorema de rectificación de campos.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U. Dado $p \in U$, existen $U_p \subseteq U$ un entorno de p y un difeomorfismo $F : U_p \longrightarrow W = F(U_p) \subseteq \mathbb{R}^2$, de clase $\mathcal{C}^r$, tales que

$$DF(\overline{x}, \overline{y})(\mathrm{X}(\overline{x}, \overline{y})) = (1, 0), \text{ para } (\overline{x}, \overline{y}) \in U_p.$$

La demostración del resultado se basa en utilizar las propiedades del flujo del campo X así como el Teorema de la Función Inversa.

Las curvas integrales del campo $(1, 0)$ son las rectas α dadas por $\overline{y} = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante. Por tanto, $\gamma = F^{-1}(W \cap \alpha)$ son curvas integrales del campo X en las variables originales.

Teorema de rectificación de campos.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U. Dado $p \in U$, existen $U_p \subseteq U$ un entorno de p y un difeomorfismo $F : U_p \longrightarrow W = F(U_p) \subseteq \mathbb{R}^2$, de clase $\mathcal{C}^r$, tales que

$$DF(\overline{x}, \overline{y})(\mathrm{X}(\overline{x}, \overline{y})) = (1, 0), \text{ para } (\overline{x}, \overline{y}) \in U_p.$$

La demostración del resultado se basa en utilizar las propiedades del flujo del campo X así como el Teorema de la Función Inversa.

Las curvas integrales del campo $(1, 0)$ son las rectas α dadas por $\overline{y} = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante. Por tanto, $\gamma = F^{-1}(W \cap \alpha)$ son curvas integrales del campo X en las variables originales.

Teorema de rectificación de campos.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U. Dado $p \in U$, existen $U_p \subseteq U$ un entorno de p y un difeomorfismo $F : U_p \longrightarrow W = F(U_p) \subseteq \mathbb{R}^2$, de clase $\mathcal{C}^r$, tales que

$$DF(\overline{x}, \overline{y})(\mathrm{X}(\overline{x}, \overline{y})) = (1, 0), \text{ para } (\overline{x}, \overline{y}) \in U_p.$$

La demostración del resultado se basa en utilizar las propiedades del flujo del campo X así como el Teorema de la Función Inversa.

Las curvas integrales del campo $(1, 0)$ son las rectas α dadas por $\overline{y} = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante. Por tanto, $\gamma = F^{-1}(W \cap \alpha)$ son curvas integrales del campo X en las variables originales.

El anulador de X

Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Las ecuaciones $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ se escriben con frecuencia en libros clásicos como $P(x,y)dx - Q(x,y)dy = 0$.
- La 1-forma $\omega_X = Pdx - Qdy \neq 0$ verifica $\omega_X(X) = X(\omega_X) = PQ - QP = 0$.
- $\mathrm{Ann}\,\{X\} = \{\omega \in \Omega^1_r(U) : \omega(X) = 0\}$ está generado por ω_X.

Problema algebraico

Encontrar una curva diferenciable γ que pase por $p \in U$ tal que $\phi^*\omega = 0$ para cada $\omega \in \mathrm{Ann}\,\{X\}$ y cada parametrización de γ $(]a,b[, \phi)$ verificando $\phi(t_0) = p$.

El anulador de X

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Las ecuaciones $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ se escriben con frecuencia en libros clásicos como $P(x,y)dx - Q(x,y)dy = 0$.
- La 1-forma $\omega_\mathrm{X} = Pdx - Qdy \neq 0$ verifica $\omega_\mathrm{X}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\omega_\mathrm{X}) = PQ - QP = 0$.
- $\mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\} = \{\omega \in \Omega^1_r(U) : \omega(\mathrm{X}) = 0\}$ está generado por ω_X.

Problema algebraico

Encontrar una curva diferenciable γ que pase por $p \in U$ tal que $\phi^*\omega = 0$ para cada $\omega \in \mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\}$ y cada parametrización de γ $(]a,b[,\phi)$ verificando $\phi(t_0) = p$.

El anulador de X

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Las ecuaciones $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ se escriben con frecuencia en libros clásicos como $P(x,y)dx - Q(x,y)dy = 0$.
- La 1-forma $\omega_{\mathrm{X}} = Pdx - Qdy \neq 0$ verifica $\omega_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\omega_{\mathrm{X}}) = PQ - QP = 0$.
- $\mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\} = \{\omega \in \Omega_r^1(U) : \omega(\mathrm{X}) = 0\}$ está generado por ω_{X}.

Problema algebraico

Encontrar una curva diferenciable γ que pase por $p \in U$ tal que $\phi^*\omega = 0$ para cada $\omega \in \mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\}$ y cada parametrización de γ $(]a,b[,\phi)$ verificando $\phi(t_0) = p$.

El anulador de X

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Las ecuaciones $y'(x) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y $x'(y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ se escriben con frecuencia en libros clásicos como $P(x,y)dx - Q(x,y)dy = 0$.
- La 1-forma $\omega_{\mathrm{X}} = Pdx - Qdy \neq 0$ verifica $\omega_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\omega_{\mathrm{X}}) = PQ - QP = 0$.
- $\mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\} = \{\omega \in \Omega^1_r(U) : \omega(\mathrm{X}) = 0\}$ está generado por ω_{X}.

Problema algebraico

Encontrar una curva diferenciable γ que pase por $p \in U$ tal que $\phi^*\omega = 0$ para cada $\omega \in \mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\}$ y cada parametrización de γ $(]a,b[,\phi)$ verificando $\phi(t_0) = p$.

Curvas integrales y el problema algebraico.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Si γ es solución del problema algebraico, entonces es la curva integral del campo X que pasa por p.
- Si γ es la curva integral del campo X que pasa por p, entonces es solución del problema algebraico.

Curvas integrales y el problema algebraico.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- Si γ es solución del problema algebraico, entonces es la curva integral del campo X que pasa por p.
- Si γ es la curva integral del campo X que pasa por p, entonces es solución del problema algebraico.

La ecuación de Pfaff en 2 variables.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- La ecuación de Pfaff en dos variables es la expresión $\omega_{\mathrm{X}} = 0$. Tiene asociadas las ecuaciones diferenciales $P - Qy' = 0$, $Px' - Q = 0$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es un representación implícita local de una curva integral de X, entonces H es integral primera y $dH(\mathrm{X}) = 0$. Así, existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega_{\mathrm{X}}$.
- Si H es una primitiva de una 1-forma exacta y no nula $\omega \in \mathrm{Ann}\{\mathrm{X}\}$, es integral primera y define implícitamente una curva integral de X.
- Sus soluciones son las curvas integrales del campo X.

La ecuación de Pfaff en 2 variables.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- La ecuación de Pfaff en dos variables es la expresión $\omega_{\mathrm{X}} = 0$. Tiene asociadas las ecuaciones diferenciales $P - Qy' = 0$, $Px' - Q = 0$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es un representación implícita local de una curva integral de X, entonces H es integral primera y $dH(\mathrm{X}) = 0$. Así, existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega_{\mathrm{X}}$.
- Si H es una primitiva de una 1-forma exacta y no nula $\omega \in \mathrm{Ann}\,\{\mathrm{X}\}$, es integral primera y define implícitamente una curva integral de X.
- Sus soluciones son las curvas integrales del campo X.

La ecuación de Pfaff en 2 variables.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- La ecuación de Pfaff en dos variables es la expresión $\omega_{\mathrm{X}} = 0$. Tiene asociadas las ecuaciones diferenciales $P - Qy' = 0$, $Px' - Q = 0$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es un representación implícita local de una curva integral de X, entonces H es integral primera y $dH(\mathrm{X}) = 0$. Así, existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega_{\mathrm{X}}$.
- Si H es una primitiva de una 1-forma exacta y no nula $\omega \in \mathrm{Ann}\,\{\mathrm{X}\}$, es integral primera y define implícitamente una curva integral de X.
- Sus soluciones son las curvas integrales del campo X.

La ecuación de Pfaff en 2 variables.

Sea $\mathrm{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, no nulo en U.

- La ecuación de Pfaff en dos variables es la expresión $\omega_{\mathrm{X}} = 0$. Tiene asociadas las ecuaciones diferenciales $P - Qy' = 0$, $Px' - Q = 0$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es un representación implícita local de una curva integral de X, entonces H es integral primera y $dH(\mathrm{X}) = 0$. Así, existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega_{\mathrm{X}}$.
- Si H es una primitiva de una 1-forma exacta y no nula $\omega \in \mathrm{Ann}\,\{\mathrm{X}\}$, es integral primera y define implícitamente una curva integral de X.
- Sus soluciones son las curvas integrales del campo X.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, supongamos que $P_1(p) \neq 0$. Sea $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

- $p \in \gamma$, $T(\gamma, q) = \langle X(q) \rangle$ para $q \in \gamma \cap U_0$.
- $\mathrm{Ann}\,\{X\}$ generado por $n-1$ formas no nulas, $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.
- $\phi^* \omega = 0$ para cada $(]a, b[, \phi)$ con $p \in \phi(]a, b[)$ y $\omega \in \mathrm{Ann}\,\{X\}$.
- $f : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $f_{x_1} P_1 + \cdots + f_{x_n} P_n = 0$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, supongamos que $P_1(p) \neq 0$. Sea $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

- $p \in \gamma$, $T(\gamma, q) = \langle X(q) \rangle$ para $q \in \gamma \cap U_0$.
- $\mathrm{Ann}\{X\}$ generado por $n-1$ formas no nulas, $\omega_i = P_{i+1}dx_1 - P_1 dx_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.
- $\phi^*\omega = 0$ para cada $(]a, b[, \phi)$ con $p \in \phi(]a, b[)$ y $\omega \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- $f : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $f_{x_1}P_1 + \cdots + f_{x_n}P_n = 0$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \dots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$, supongamos que $P_1(p) \neq 0$. Sea $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

- $p \in \gamma$, $T(\gamma, q) = \langle X(q) \rangle$ para $q \in \gamma \cap U_0$.
- $\mathrm{Ann}\{X\}$ generado por $n-1$ formas no nulas, $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.
- $\phi^* \omega = 0$ para cada $(]a,b[, \phi)$ con $p \in \phi(]a,b[)$ y $\omega \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- $f : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $f_{x_1} P_1 + \cdots + f_{x_n} P_n = 0$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \dots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$, supongamos que $P_1(p) \neq 0$. Sea $\gamma \subseteq U$ curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

- $p \in \gamma$, $T(\gamma, q) = \langle X(q) \rangle$ para $q \in \gamma \cap U_0$.
- $\mathrm{Ann}\{X\}$ generado por $n-1$ formas no nulas, $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.
- $\phi^* \omega = 0$ para cada $(]a, b[, \phi)$ con $p \in \phi(]a, b[)$ y $\omega \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- $f : U \to \mathbb{R}$ es integral primera de X si $f_{x_1} P_1 + \cdots + f_{x_n} P_n = 0$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la gráfica de la solución de $\begin{cases} y' = h(x_1, y), \\ y(p_1) = (p_2, \ldots, p_n), \end{cases}$ donde $y = (x_2, \ldots, x_n)$, $h = \left(\frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}\right)$.
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma implícita mediante $H(x) - H(p) = 0$, donde $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ y H_i son $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la gráfica de la solución de $\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & h(x_1, y), \\ y(p_1) & = & (p_2, \ldots, p_n), \end{array}\right.$ donde $y = (x_2, \ldots, x_n), h = \left(\frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}\right)$.
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma implícita mediante $H(x) - H(p) = 0$, donde $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ y H_i son $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la gráfica de la solución de $\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & h(x_1, y), \\ y(p_1) & = & (p_2, \ldots, p_n), \end{array} \right.$ donde $y = (x_2, \ldots, x_n), h = \left(\frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1} \right)$.
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma implícita mediante $H(x) - H(p) = 0$, donde $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ y H_i son $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la gráfica de la solución de $\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & h(x_1, y), \\ y(p_1) & = & (p_2, \ldots, p_n), \end{array} \right.$ donde $y = (x_2, \ldots, x_n)$, $h = \left(\frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1} \right)$.
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma implícita mediante $H(x) - H(p) = 0$, donde $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ y H_i son $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes de clase $\mathcal{C}^{r+1}$.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma paramétrica a partir de la solución maximal de clase $\mathcal{C}^{r+1}$ del sistema característico $\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma'(t) & = & \mathrm{X}(\sigma(t)), \\ \sigma(0) & = & p. \end{array} \right.$
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la curva solución del problema algebraico asociado.

Integración de un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$, Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

Son equivalentes:

- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p en forma paramétrica a partir de la solución maximal de clase $\mathcal{C}^{r+1}$ del sistema característico $\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma'(t) & = & \mathrm{X}(\sigma(t)), \\ \sigma(0) & = & p. \end{array} \right.$
- Hallar la curva integral del campo X que pasa por p como la curva solución del problema algebraico asociado.

Sistema de Pfaff asociado

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

- $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$. El sistema de Pfaff consiste en las ecuaciones $\omega_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$.
- Si $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ es una representación implícita local (RIL) de una curva integral del campo X, es $dH_i \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- Si $H_i : U \to \mathbb{R}$ son primitivas de $n-1$ formas exactas e independientes en $\mathrm{Ann}\{X\}$, $H = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ es una RIL de una curva integral de X.
- Las soluciones del sistema de Pfaff son las curvas integrales de X.

Sistema de Pfaff asociado

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

- $\omega_i = P_{i+1}dx_1 - P_1 dx_{i+1}$. El sistema de Pfaff consiste en las ecuaciones $\omega_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$.
- Si $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ es una representación implícita local (RIL) de una curva integral del campo X, es $dH_i \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- Si $H_i : U \to \mathbb{R}$ son primitivas de $n-1$ formas exactas e independientes en $\mathrm{Ann}\{X\}$, $H = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ es una RIL de una curva integral de X.
- Las soluciones del sistema de Pfaff son las curvas integrales de X.

Sistema de Pfaff asociado

Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

- $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$. El sistema de Pfaff consiste en las ecuaciones $\omega_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$.
- Si $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ es una representación implícita local (RIL) de una curva integral del campo X, es $dH_i \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- Si $H_i : U \to \mathbb{R}$ son primitivas de $n-1$ formas exactas e independientes en $\mathrm{Ann}\{X\}$, $H = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ es una RIL de una curva integral de X.
- Las soluciones del sistema de Pfaff son las curvas integrales de X.

Sistema de Pfaff asociado

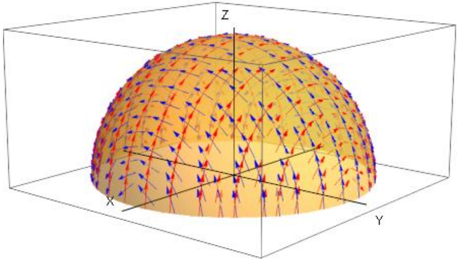
Sea un campo vectorial $X = (P_1, \ldots, P_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$ y no nulo en U. Supongamos que $P_1(p) \neq 0$.

- $\omega_i = P_{i+1} dx_1 - P_1 dx_{i+1}$. El sistema de Pfaff consiste en las ecuaciones $\omega_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$.
- Si $H = (H_1, \ldots, H_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ es una representación implícita local (RIL) de una curva integral del campo X, es $dH_i \in \mathrm{Ann}\{X\}$.
- Si $H_i : U \to \mathbb{R}$ son primitivas de $n-1$ formas exactas e independientes en $\mathrm{Ann}\{X\}$, $H = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ es una RIL de una curva integral de X.
- Las soluciones del sistema de Pfaff son las curvas integrales de X.

Superficies integrales

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $p \in U$. Si $\dim\langle X(p), Y(p)\rangle = 2$, decimos que X, Y forman campo de planos.

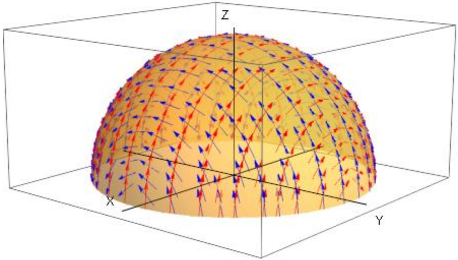
- $p \in S$, $T(S,q) = \langle X(q), Y(q)\rangle$ para $q \in S \cap U_0$.
- $Z = X \times Y$ verifica $\langle Z(q)\rangle = N(S,q) = T(S,q)^{\perp} = \langle X(q), Y(q)\rangle^{\perp}$.



Superficies integrales

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $p \in U$. Si $\dim\langle X(p), Y(p)\rangle = 2$, decimos que X, Y forman campo de planos.

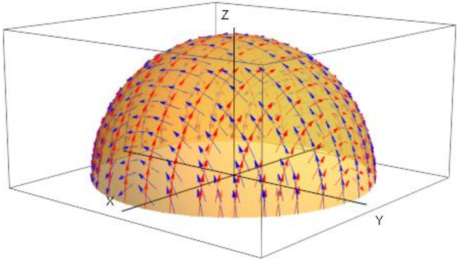
- $p \in S$, $T(S, q) = \langle X(q), Y(q)\rangle$ para $q \in S \cap U_0$.
- $Z = X \times Y$ verifica $\langle Z(q)\rangle = N(S, q) = T(S, q)^{\perp} = \langle X(q), Y(q)\rangle^{\perp}$.



Superficies integrales

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $p \in U$. Si $\dim\langle X(p), Y(p)\rangle = 2$, decimos que X, Y forman campo de planos.

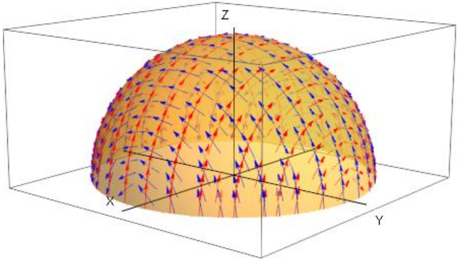
- $p \in S$, $T(S, q) = \langle X(q), Y(q)\rangle$ para $q \in S \cap U_0$.
- $Z = X \times Y$ verifica $\langle Z(q)\rangle = N(S, q) = T(S, q)^{\perp} = \langle X(q), Y(q)\rangle^{\perp}$.



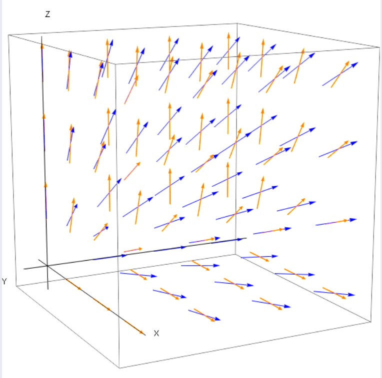
Superficies integrales

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $p \in U$. Si $\dim\langle X(p), Y(p)\rangle = 2$, decimos que X, Y forman campo de planos.

- $p \in S$, $T(S, q) = \langle X(q), Y(q)\rangle$ para $q \in S \cap U_0$.
- $Z = X \times Y$ verifica $\langle Z(q)\rangle = N(S, q) = T(S, q)^{\perp} = \langle X(q), Y(q)\rangle^{\perp}$.



¿Siempre existe superficie integral?



El campo de planos $X(x,y,z) = (x,y,z)$, $Y(x,y,z) = (x^2,0,z)$ no es integrable en $U = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

¿Siempre existe superficie integral?

- Supongamos que $f : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dado $p \in U$ existe $W \subseteq U$ tal que

$$S \cap W = Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in V\}.$$

- Como $T(S, (x, y, f(x, y))) = \langle (1, 0, f_x(x, y)), (0, 1, f_y(x, y)) \rangle$, y $X(x, y, f(x, y)), Y(x, y, f(x, y)) \in T(S, (x, y, f(x, y)))$,

$$\begin{cases} f(x, y) = x f_x(x, y) + y f_y(x, y), \\ f(x, y) = x^2 f_x(x, y). \end{cases}$$

- El sistema anterior tiene como única solución $f = 0$, si bien $(x, y, 0) \notin U$.

¿Siempre existe superficie integral?

- Supongamos que $f : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dado $p \in U$ existe $W \subseteq U$ tal que

$$S \cap W = Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in V\}.$$

- Como $T(S, (x, y, f(x, y))) = \langle (1, 0, f_x(x, y)), (0, 1, f_y(x, y)) \rangle$, y $X(x, y, f(x, y)), Y(x, y, f(x, y)) \in T(S, (x, y, f(x, y)))$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x, y) & = & x f_x(x, y) + y f_y(x, y), \\ f(x, y) & = & x^2 f_x(x, y). \end{array} \right.$$

- El sistema anterior tiene como única solución $f = 0$, si bien $(x, y, 0) \notin U$.

¿Siempre existe superficie integral?

- Supongamos que $f : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dado $p \in U$ existe $W \subseteq U$ tal que

$$S \cap W = Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in V\}.$$

- Como $T(S, (x, y, f(x, y))) = \langle (1, 0, f_x(x, y)), (0, 1, f_y(x, y)) \rangle$, y $X(x, y, f(x, y)), Y(x, y, f(x, y)) \in T(S, (x, y, f(x, y)))$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y) & = & xf_x(x,y) + yf_y(x,y), \\ f(x,y) & = & x^2 f_x(x,y). \end{array} \right.$$

- El sistema anterior tiene como única solución $f = 0$, si bien $(x, y, 0) \notin U$.

Caracterización analítica

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sean $Z = X \times Y$ y $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$.

- $Z_3(p) \neq 0$, definimos $f = -\frac{Z_1}{Z_3}$, $g = -\frac{Z_2}{Z_3}$.
- Si una superficie integral de X, Y se escribe como $z = h(x, y)$, entonces h es solución de $\begin{cases} z_x = f(x, y, z), \\ z_y = g(x, y, z), \\ z(x_0, y_0) = z_0. \end{cases}$
- Si el sistema anterior es compatible, las gráficas de sus soluciones son superficies integrales.

Caracterización analítica

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sean $Z = X \times Y$ y $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$.

- $Z_3(p) \neq 0$, definimos $f = -\frac{Z_1}{Z_3}$, $g = -\frac{Z_2}{Z_3}$.
- Si una superficie integral de X, Y se escribe como $z = h(x, y)$, entonces h es solución de $\begin{cases} z_x = f(x,y,z), \\ z_y = g(x,y,z), \\ z(x_0, y_0) = z_0. \end{cases}$
- Si el sistema anterior es compatible, las gráficas de sus soluciones son superficies integrales.

Caracterización analítica

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sean $Z = X \times Y$ y $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$.

- $Z_3(p) \neq 0$, definimos $f = -\frac{Z_1}{Z_3}$, $g = -\frac{Z_2}{Z_3}$.
- Si una superficie integral de X, Y se escribe como $z = h(x, y)$, entonces h es solución de $\begin{cases} z_x = f(x,y,z), \\ z_y = g(x,y,z), \\ z(x_0, y_0) = z_0. \end{cases}$
- Si el sistema anterior es compatible, las gráficas de sus soluciones son superficies integrales.

Caracterización analítica

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sean $Z = X \times Y$ y $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$.

- $Z_3(p) \neq 0$, definimos $f = -\frac{Z_1}{Z_3}$, $g = -\frac{Z_2}{Z_3}$.
- Si una superficie integral de X, Y se escribe como $z = h(x, y)$, entonces h es solución de $\begin{cases} z_x = f(x, y, z), \\ z_y = g(x, y, z), \\ z(x_0, y_0) = z_0. \end{cases}$
- Si el sistema anterior es compatible, las gráficas de sus soluciones son superficies integrales.

2-Distribuciones

Sean $X_1, X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos.

- $p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p) \rangle$ es una distribución de rango 2, $\langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, X_2 \rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\rangle$ para ciertas variables z_1, z_2, z_3.

Teorema de Frobenius

Una 2-distribución $\langle X_1, X_2 \rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

2-Distribuciones

Sean $X_1, X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos.

- $p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p)\rangle$ es una distribución de rango 2, $\langle X_1, X_2\rangle$.
- $\langle X_1, X_2\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, X_2\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, X_2\rangle$.
- $\langle X_1, X_2\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right\rangle$ para ciertas variables z_1, z_2, z_3.

Teorema de Frobenius

Una 2-distribución $\langle X_1, X_2\rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

2-Distribuciones

Sean $X_1, X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos.

- $p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p) \rangle$ es una distribución de rango 2, $\langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, X_2 \rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\rangle$ para ciertas variables z_1, z_2, z_3.

Teorema de Frobenius

Una 2-distribución $\langle X_1, X_2 \rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

2-Distribuciones

Sean $X_1, X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos.

- $p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p) \rangle$ es una distribución de rango 2, $\langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, X_2 \rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\rangle$ para ciertas variables z_1, z_2, z_3.

Teorema de Frobenius

Una 2-distribución $\langle X_1, X_2 \rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

2-Distribuciones

Sean $X_1, X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos.

- $p \mapsto \langle X_1(p), X_2(p) \rangle$ es una distribución de rango 2, $\langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, X_2 \rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, X_2 \rangle$.
- $\langle X_1, X_2 \rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\rangle$ para ciertas variables z_1, z_2, z_3.

Teorema de Frobenius

Una 2-distribución $\langle X_1, X_2 \rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

El anulador de X, Y

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sea $Z = X \times Y$.

- $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz \in \Omega^1_r(U)$.
- $\operatorname{Ann}\{X, Y\}$ está generado por ω.

Equivale a integrabilidad de X,Y en p.

- $Z \cdot \operatorname{rot} Z = 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $d\omega = \eta \wedge \omega$, para cierta $\eta \in \Omega^1_{r-1}(U)$.

El anulador de X, Y

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sea $Z = X \times Y$.

- $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz \in \Omega^1_r(U)$.
- $\mathrm{Ann}\,\{X, Y\}$ está generado por ω.

Equivale a integrabilidad de X,Y en p.

- $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $d\omega = \eta \wedge \omega$, para cierta $\eta \in \Omega^1_{r-1}(U)$.

El anulador de X, Y

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sea $Z = X \times Y$.

- $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz \in \Omega^1_r(U)$.
- $\mathrm{Ann}\,\{X, Y\}$ está generado por ω.

Equivale a integrabilidad de X,Y en p.

- $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $d\omega = \eta \wedge \omega$, para cierta $\eta \in \Omega^1_{r-1}(U)$.

El anulador de X, Y

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sea $Z = X \times Y$.

- $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz \in \Omega_r^1(U)$.
- $\mathrm{Ann}\,\{X, Y\}$ está generado por ω.

Equivale a integrabilidad de X,Y en p.

- $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $d\omega = \eta \wedge \omega$, para cierta $\eta \in \Omega_{r-1}^1(U)$.

El anulador de X, Y

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campo de planos. Sea $Z = X \times Y$.

- $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz \in \Omega^1_r(U)$.
- $\mathrm{Ann}\{X, Y\}$ está generado por ω.

Equivale a integrabilidad de X,Y en p.

- $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $d\omega = \eta \wedge \omega$, para cierta $\eta \in \Omega^1_{r-1}(U)$.

El anulador de X, Y

- Para probar que si el campo de planos es integrable entonces $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$, se considera una representación implícita local de la superficie integral y se utiliza que $(\mu Z) \cdot \mathrm{rot}(\mu Z) = \mu^2 (Z \cdot \mathrm{rot} Z)$
- Para la implicación contraria, se prueba que la $2-$ distribución que generan X e Y es involutiva y se aplica el Teorema de Frobenius; empleando para ello la relación

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \mathrm{rot}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{div}(\mathrm{Y})\mathrm{X} - \mathrm{div}(\mathrm{X})\mathrm{Y}.$$

El anulador de X, Y

- Para probar que si el campo de planos es integrable entonces $Z \cdot \mathrm{rot} Z = 0$, se considera una representación implícita local de la superficie integral y se utiliza que $(\mu Z) \cdot \mathrm{rot}(\mu Z) = \mu^2 (Z \cdot \mathrm{rot} Z)$
- Para la implicación contraria, se prueba que la $2-$ distribución que generan X e Y es involutiva y se aplica el Teorema de Frobenius; empleando para ello la relación

$$[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] + \mathrm{rot}(\mathsf{X} \times \mathsf{Y}) = \mathrm{div}(\mathsf{Y})\mathsf{X} - \mathrm{div}(\mathsf{X})\mathsf{Y}.$$

Sistema de Pfaff asociado a una 2−distribución.

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $\langle X, Y \rangle$. Sean $Z = X \times Y$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz$.

- Si H es representación implícita local de una superficie integral que pasa por p, es $dH \in \mathrm{Ann}\{X, Y\}$, luego existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es una primitiva de una 1−forma exacta y no nula en $\mathrm{Ann}\{X, Y\}$, es una representación implícita local de una superficie integral que pasa por p.

Sistema de Pfaff asociado a una 2−distribución.

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, $\langle X, Y \rangle$. Sean $Z = X \times Y$, $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz$.

- Si H es representación implícita local de una superficie integral que pasa por p, es $dH \in \operatorname{Ann}\{X, Y\}$, luego existe $\lambda \in \mathcal{C}^r(U)$ tal que $dH = \lambda \cdot \omega$.
- Si $H : U \to \mathbb{R}$ es una primitiva de una 1−forma exacta y no nula en $\operatorname{Ann}\{X, Y\}$, es una representación implícita local de una superficie integral que pasa por p.

Sistema de Pfaff asociado a una $2-$distribución.

Sean $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, tales que generan una $2-$distribución $\langle X, Y \rangle$. Sean $Z = X \times Y$, y $\omega = Z_1 dx + Z_2 dy + Z_3 dz$.

Ecuación de Pfaff asociada

$\omega = 0$. Decimos que es integrable si y sólo si lo es la distribución $\langle X, Y \rangle$. Las soluciones de la ecuación son las superficies integrales de la distribución.

Presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

- $\omega = ay^3z^3dx + bx^3z^3dy + cx^3y^3dz = 0$, con $a, b, c > 0$, en $U = \{(x, y, z) : xyz \neq 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{x^3y^3z^3}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{a}{x^3}dx + \frac{b}{y^3}dy + \frac{c}{z^3}dz$.
- $H(x, y, z) = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{2y^2} - \frac{c}{2z^2}$.

Ejemplo 1

- $\omega = ay^3z^3dx + bx^3z^3dy + cx^3y^3dz = 0$, con $a, b, c > 0$, en $U = \{(x, y, z) : xyz \neq 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{x^3y^3z^3}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{a}{x^3}dx + \frac{b}{y^3}dy + \frac{c}{z^3}dz$.
- $H(x, y, z) = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{2y^2} - \frac{c}{2z^2}$.

Ejemplo 1

- $\omega = ay^3z^3dx + bx^3z^3dy + cx^3y^3dz = 0$, con $a, b, c > 0$, en $U = \{(x, y, z) : xyz \neq 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{x^3y^3z^3}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{a}{x^3}dx + \frac{b}{y^3}dy + \frac{c}{z^3}dz$.
- $H(x, y, z) = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{2y^2} - \frac{c}{2z^2}$.

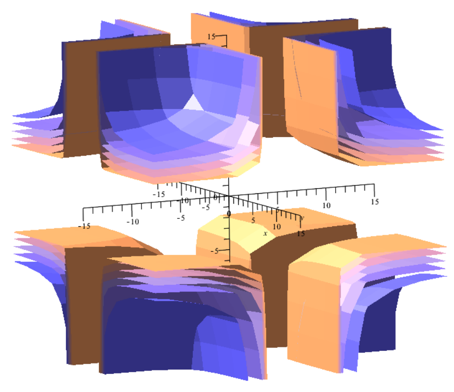
Ejemplo 1

- $\omega = ay^3z^3dx + bx^3z^3dy + cx^3y^3dz = 0$, con $a, b, c > 0$, en $U = \{(x, y, z) : xyz \neq 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{x^3y^3z^3}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{a}{x^3}dx + \frac{b}{y^3}dy + \frac{c}{z^3}dz$.
- $H(x, y, z) = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{2y^2} - \frac{c}{2z^2}$.

Ejemplo 1

- $\omega = ay^3z^3dx + bx^3z^3dy + cx^3y^3dz = 0$, con $a, b, c > 0$, en $U = \{(x, y, z) : xyz \neq 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{x^3y^3z^3}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{a}{x^3}dx + \frac{b}{y^3}dy + \frac{c}{z^3}dz$.
- $H(x, y, z) = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{2y^2} - \frac{c}{2z^2}$.

Ejemplo 1



Superficies integrales $H(x, y, z) = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2 - a^2)(x^2 - z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2} + \frac{y}{y^2 - a^2}dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^* \omega = \frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - z^2| + \frac{1}{2} \ln |y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2 - a^2)(x^2 - z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2} + \frac{y}{y^2 - a^2} dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^* \omega = \frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - z^2| + \frac{1}{2} \ln |y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = {\pi_{y_0}}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

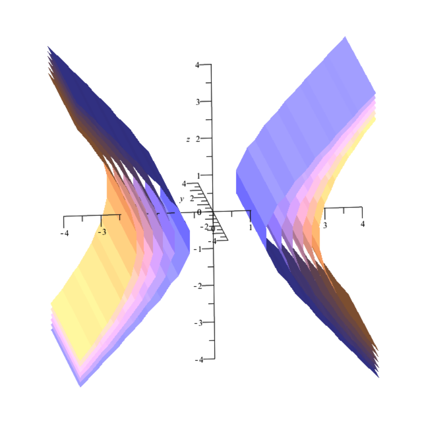
Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = \pi_{y_0}{}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2

- $\omega = x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$ en $U = \mathbb{R}^3$, y para $a > 0$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$.
- $\lambda(x, y, z) = \frac{1}{(y^2-a^2)(x^2-z^2)}$ es un factor integrante de la ecuación anterior.
- $0 = \lambda \cdot \omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2} + \frac{y}{y^2-a^2}dy$.
- $0 = \pi_{y_0}{}^*\omega = \frac{xdx-zdz}{x^2-z^2}$.
- $F(x, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2|$.
- $H_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2|$.
- Definimos $H(x, y, z) = (x^2 - z^2)(y^2 - a^2)$.

Ejemplo 2



Superficies integrales $H(x, y, z) = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x, y, z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x, y, z) : z = z_0\} = \{(x, y, z) : \phi_{z_0}(x, y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x, y, z) := \phi_z(x, y)$, $S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x, y, z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x, y, z) : z = z_0\} = \{(x, y, z) : \phi_{z_0}(x, y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x, y, z) := \phi_z(x, y)$, $S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x,y,z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x,y,z) : z = z_0\} = \{(x,y,z) : \phi_{z_0}(x,y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x,y,z) := \phi_z(x,y)$, $S = \{(x,y,z) : \phi(x,y,z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x, y, z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x, y, z) : z = z_0\} = \{(x, y, z) : \phi_{z_0}(x, y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x, y, z) := \phi_z(x, y)$, $S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x, y, z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x, y, z) : z = z_0\} = \{(x, y, z) : \phi_{z_0}(x, y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x, y, z) := \phi_z(x, y)$, $S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

- $\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz$, en $U = \{(x, y, z) : y > 0\}$.
- $\omega \wedge d\omega = 0$, es integrable. Supongamos que S es superficie integral.
- $0 = {\pi_{z_0}}^* \omega = x^2 y dx + \frac{z_0}{y} dy$.
- $\phi_{z_0}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{z_0}{y}$.
- $S \cap \{(x, y, z) : z = z_0\} = \{(x, y, z) : \phi_{z_0}(x, y) = K(z_0)\}$.
- $\phi(x, y, z) := \phi_z(x, y)$, $S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = K(z)\}$.

Ejemplo 3: método de Natani

Ejemplo

- $0 = {\pi_1}^* \omega = x^2 dx - dz.$
- $h(x,z) = \frac{x^3}{3} - z$, $S \cap \{(x,y,z) : y = 1\} = \{(x,1,z) : h(x,z) = a\} = \{(x,1,z) : \phi(x,1,z) = K(z)\}.$
- $h(x,z) = \phi(x,1,z)$, luego $K(z) = a.$
- Definimos $H(x,y,z) = \phi(x,y,z).$

Ejemplo 3: método de Natani

Ejemplo

- $0 = {\pi_1}^*\omega = x^2dx - dz.$
- $h(x,z) = \frac{x^3}{3} - z$, $S \cap \{(x,y,z) : y = 1\} = \{(x,1,z) : h(x,z) = a\} = \{(x,1,z) : \phi(x,1,z) = K(z)\}.$
- $h(x,z) = \phi(x,1,z)$, luego $K(z) = a$.
- Definimos $H(x,y,z) = \phi(x,y,z)$.

Ejemplo 3: método de Natani

Ejemplo

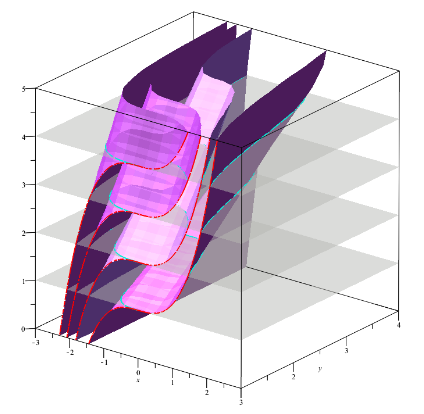
- $0 = {\pi_1}^*\omega = x^2dx - dz.$
- $h(x,z) = \frac{x^3}{3} - z$, $S \cap \{(x,y,z) : y = 1\} = \{(x,1,z) : h(x,z) = a\} = \{(x,1,z) : \phi(x,1,z) = K(z)\}.$
- $h(x,z) = \phi(x,1,z)$, luego $K(z) = a$.
- Definimos $H(x,y,z) = \phi(x,y,z)$.

Ejemplo 3: método de Natani

Ejemplo

- $0 = {\pi_1}^*\omega = x^2dx - dz$.
- $h(x,z) = \frac{x^3}{3} - z$, $S \cap \{(x,y,z) : y = 1\} = \{(x,1,z) : h(x,z) = a\} = \{(x,1,z) : \phi(x,1,z) = K(z)\}$.
- $h(x,z) = \phi(x,1,z)$, luego $K(z) = a$.
- Definimos $H(x,y,z) = \phi(x,y,z)$.

Ejemplo 3: método de Natani



Superficies integrales $H(x, y, z) = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Ejemplo 4: método de reducción a EDO

- $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, se tiene $d\omega = 0 = 0 \wedge \omega$ y es integrable.
- $0 = {\pi_k}^*\omega = (y+x+ky)dx + (x+x+ky)dy + (x+y)(dx+kdy) = (2x+(2+k)y)dx + ((2+k)x+2ky)dy.$
- $\phi(x,y,k) = ky^2 + (2+k)xy + x^2$, $S \cap \{(x,y,z) : z = x+ky\} = \{(x,y,x+ky) : \phi(x,y,k) = C\}.$
- $S = \{(x,y,z) : \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = C\}$
- $H(x,y,z) = \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = zx + xy + zy.$

Ejemplo 4: método de reducción a EDO

- $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, se tiene $d\omega = 0 = 0 \wedge \omega$ y es integrable.
- $0 = {\pi_k}^*\omega = (y+x+ky)dx + (x+x+ky)dy + (x+y)(dx+kdy) = (2x+(2+k)y)dx + ((2+k)x+2ky)dy$.
- $\phi(x,y,k) = ky^2 + (2+k)xy + x^2$, $S \cap \{(x,y,z) : z = x+ky\} = \{(x,y,x+ky) : \phi(x,y,k) = C\}$.
- $S = \{(x,y,z) : \phi\left(x,y,\frac{z-x}{y}\right) = C\}$
- $H(x,y,z) = \phi\left(x,y,\frac{z-x}{y}\right) = zx + xy + zy$.

Ejemplo 4: método de reducción a EDO

- $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, se tiene $d\omega = 0 = 0 \wedge \omega$ y es integrable.
- $0 = {\pi_k}^*\omega = (y+x+ky)dx + (x+x+ky)dy + (x+y)(dx+kdy) = (2x + (2+k)y)dx + ((2+k)x + 2ky)dy$.
- $\phi(x,y,k) = ky^2 + (2+k)xy + x^2$, $S \cap \{(x,y,z) : z = x+ky\} = \{(x,y,x+ky) : \phi(x,y,k) = C\}$.
- $S = \{(x,y,z) : \phi\left(x,y,\frac{z-x}{y}\right) = C\}$
- $H(x,y,z) = \phi\left(x,y,\frac{z-x}{y}\right) = zx + xy + zy$.

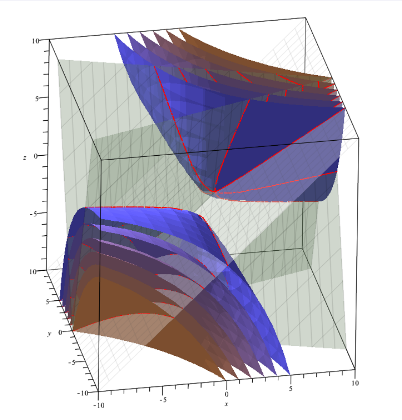
Ejemplo 4: método de reducción a EDO

- $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, se tiene $d\omega = 0 = 0 \wedge \omega$ y es integrable.
- $0 = {\pi_k}^*\omega = (y+x+ky)dx + (x+x+ky)dy + (x+y)(dx+kdy) = (2x+(2+k)y)dx + ((2+k)x+2ky)dy$.
- $\phi(x,y,k) = ky^2 + (2+k)xy + x^2$, $S \cap \{(x,y,z) : z = x+ky\} = \{(x,y,x+ky) : \phi(x,y,k) = C\}$.
- $S = \{(x,y,z) : \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = C\}$
- $H(x,y,z) = \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = zx + xy + zy$.

Ejemplo 4: método de reducción a EDO

- $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, se tiene $d\omega = 0 = 0 \wedge \omega$ y es integrable.
- $0 = {\pi_k}^* \omega = (y+x+ky)dx+(x+x+ky)dy+(x+y)(dx+kdy) = (2x+(2+k)y)dx+((2+k)x+2ky)dy$.
- $\phi(x,y,k) = ky^2+(2+k)xy+x^2$, $S \cap \{(x,y,z) : z = x+ky\} = \{(x,y,x+ky) : \phi(x,y,k) = C\}$.
- $S = \{(x,y,z) : \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = C\}$
- $H(x,y,z) = \phi\left(x, y, \frac{z-x}{y}\right) = zx + xy + zy$.

Ejemplo 4: método de reducción a EDO



Superficies integrales $H(x, y, z) = C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \dots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \dots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- Decimos que los k campos son integrables en p si existe una variedad diferenciable de dimensión k, M, tal que $T(M, q) = \langle X_1(q), \dots, X_k(q)\rangle$ para q en un entorno de p.
- $p \mapsto \langle X_1(p), \dots, X_k(p)\rangle$ es una distribución de rango k, $\langle X_1, \dots X_k\rangle$.
- $\langle X_1, \dots X_k\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, \dots X_k\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, \dots X_k\rangle$. de manera local.
- $\langle X_1, \dots X_k\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle$ para ciertas variables $z_1, \dots, z_n$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- Decimos que los k campos son integrables en p si existe una variedad diferenciable de dimensión k, M, tal que $T(M, q) = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q)\rangle$ para q en un entorno de p.
- $p \mapsto \langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle$ es una distribución de rango k, $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$. de manera local.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle$ para ciertas variables $z_1, \ldots, z_n$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- Decimos que los k campos son integrables en p si existe una variedad diferenciable de dimensión k, M, tal que $T(M, q) = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q)\rangle$ para q en un entorno de p.
- $p \mapsto \langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle$ es una distribución de rango k, $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$. de manera local.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle$ para ciertas variables $z_1, \ldots, z_n$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- Decimos que los k campos son integrables en p si existe una variedad diferenciable de dimensión k, M, tal que $T(M, q) = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q)\rangle$ para q en un entorno de p.
- $p \mapsto \langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle$ es una distribución de rango k, $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$. de manera local.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle$ para ciertas variables $z_1, \ldots, z_n$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- Decimos que los k campos son integrables en p si existe una variedad diferenciable de dimensión k, M, tal que $T(M, q) = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q)\rangle$ para q en un entorno de p.
- $p \mapsto \langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle$ es una distribución de rango k, $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es involutiva en p si $[X, Y] \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$ para cada $X, Y \in \langle X_1, \ldots X_k\rangle$. de manera local.
- $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es totalmente integrable si se escribe como $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle$ para ciertas variables $z_1, \ldots, z_n$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- $\mathrm{Ann}\,\{X_1, \ldots, X_k\}$ está generado por $n-k$ $1-$formas diferenciales independientes, ω_i.

Teorema de Frobenius

Una k-distribución $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- $\mathrm{Ann}\,\{X_1, \ldots, X_k\}$ está generado por $n-k$ $1-$formas diferenciales independientes, ω_i.

Teorema de Frobenius

Una k-distribución $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

- $\mathrm{Ann}\,\{X_1, \ldots, X_k\}$ está generado por $n-k$ $1-$formas diferenciales independientes, ω_i.

Teorema de Frobenius

Una k-distribución $\langle X_1, \ldots X_k\rangle$ es integrable en $p \in U$ si y sólo si es involutiva en p.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

Son equivalentes:

- La distribución es integrable.
- La distribución es involutiva.
- $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k} = 0$.
- $d\omega_i = \eta_i^1 \wedge \omega_1 + \cdots + \eta_i^{n-k} \wedge \omega_{n-k}$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \dots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \dots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

Son equivalentes:

- La distribución es integrable.
- La distribución es involutiva.
- $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k} = 0.$
- $d\omega_i = \eta_i^1 \wedge \omega_1 + \cdots + \eta_i^{n-k} \wedge \omega_{n-k}.$

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

Son equivalentes:

- La distribución es integrable.
- La distribución es involutiva.
- $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k} = 0$.
- $d\omega_i = \eta_i^1 \wedge \omega_1 + \cdots + \eta_i^{n-k} \wedge \omega_{n-k}$.

k-Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $X_1, \ldots, X_k : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, campos vectoriales con $\dim\langle X_1(p), \ldots, X_k(p)\rangle = k$, para $p \in U$.

Son equivalentes:

- La distribución es integrable.
- La distribución es involutiva.
- $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k} = 0$.
- $d\omega_i = \eta_i^1 \wedge \omega_1 + \cdots + \eta_i^{n-k} \wedge \omega_{n-k}$.

Gracias por su atención.