

El teorema de Korovkin y métodos de sumabilidad

.....



**Workshop Functional Analysis' 2021, Jerez de la Frontera 15-16
Octubre 2021**



Contenidos

1. Teoremas de Korovkin
2. Algunos resultados de tipo Korovkin a través de métodos de sumabilidad.
3. Cuestiones
4. Métodos de sumabilidad que preservan desigualdades y desigualdades de orden.
5. Resultados principales.
6. Referencias.



Primer Teorema de Korovkin

...un teorema clásico de aproximación en el espacio $\mathcal{C}[0, 1]$ de funciones continuas en $[0, 1]$

Primer Teorema de Korovkin

Sea L_n es una sucesión de operadores positivos de $\mathcal{C}[0, 1]$ en $\mathcal{C}[0, 1]$. Entonces $\|L_n f - f\|_\infty \rightarrow 0$ para toda $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ si y sólo si $\|L_n 1 - 1\|_\infty \rightarrow 0$, $\|L_n x - x\|_\infty \rightarrow 0$ y $\|L_n x^2 - x^2\|_\infty \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

El Teorema de aproximación de Bernstein

...se obtiene como consecuencia del Teorema de Korovkin

Polinomios de Bernstein

Sea $L_n = B_n$ la sucesión definida por

$$Bf_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} : 0 \leq x \leq 1.$$

Los polinomios de Bernstein aproximan uniformemente a cualquier función continua, y para ello basta verlo solo para tres funciones: 1, x y x^2 que se obtienen trivialmente.

Segundo Teorema de Korovkin

... en el conjunto $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ y 2π periódicas.



Segundo Teorema de Korovkin

Sea L_n una sucesión de operadores positivos de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Entonces $\|L_n f - f\|_\infty \rightarrow 0$ para toda $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ si y sólo si

$\|L_n 1 - 1\|_\infty \rightarrow 0$, $\|L_n \cos(\cdot) - \cos(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0$ y

$\|L_n \sin(\cdot) - \sin(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Métodos de sumabilidad

...una formulación alternativa de convergencia



Un método de sumabilidad general definido en un espacio normado X

Es una función lineal $\mathcal{R} : \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \subset X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ (aquí $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ denota el dominio de $\mathcal{R}$). Así pues, una sucesión $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ se dice que es $\mathcal{R}$ -convergente a L (y se denotara por $x_n \xrightarrow{\mathcal{R}} L$) si $\mathcal{R}((x_n)_{n \geq 1}) = L$.

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2002 Gadjiev-Orhan obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia estadística.

Convergencia estadística

Una sucesión x_n converge estadísticamente a L si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L\| > \varepsilon\}$$

tiene densidad nula, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n : k \in A_\varepsilon\}}{n} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2002 Gadjiev-Orhan obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia estadística.

Convergencia estadística

Una sucesión x_n converge estadísticamente a L si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L\| > \varepsilon\}$$

tiene densidad nula, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n : k \in A_\varepsilon\}}{n} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2010 Edeley, Mohiuddine, Noman obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia " λ -estadística".

Convergencia λ -estadística

Sea λ_n una sucesión no decreciente, tendiendo a infinito, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, y $\lambda_1 = 0$. Se define el núcleo de la Vaallé-Poussin

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} x_j$$

donde $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$. Una sucesión (x_n) es (V, λ) -convergente a L si $t_n(x) \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si se toma $\lambda_n = n$ se obtiene la convergencia estadística.

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2010 Edeley, Mohiuddine, Noman obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia " λ -estadística".

Convergencia λ -estadística

Sea λ_n una sucesión no decreciente, tendiendo a infinito, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, y $\lambda_1 = 0$. Se define el núcleo de la Vaallé-Poussin

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} x_j$$

donde $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$. Una sucesión (x_n) es (V, λ) -convergente a L si $t_n(x) \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si se toma $\lambda_n = n$ se obtiene la convergencia estadística.

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2011 Mohiuddine obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "casi convergencia".

Casi convergencia

Una sucesión x_n casi converge a L si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left\| \sum_{l=n}^{n+p-1} x_l - L \right\| = 0$$

uniformemente en n .

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2011 Mohiuddine obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "casi convergencia".

Casi convergencia

Una sucesión x_n casi converge a L si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left\| \sum_{l=n}^{n+p-1} x_l - L \right\| = 0$$

uniformemente en n .

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2012 Mursaleen, Karakaya, Ertürk, Gürsoy obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "estadística con pesos".

Convergencia estadística con pesos

Sea (p_n) una sucesión de números no negativos tales que $p_0 > 0$, y $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$ diverge a infinito.

Una sucesión (x_n) se dice que es estadísticamente con pesos a L si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \# \{k \leq n : p_k \|x_k - L\| > \varepsilon\} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2012 Mursaleen, Karakaya, Ertürk, Gürsoy obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "estadística con pesos".

Convergencia estadística con pesos

Sea (p_n) una sucesión de números no negativos tales que $p_0 > 0$, y $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$ diverge a infinito.

Una sucesión (x_n) se dice que es estadísticamente con pesos a L si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \# \{k \leq n : p_k \|x_k - L\| > \varepsilon\} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2016 Aloataibi, Mursaleen obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "equiestadística lacunar".

Convergencia equiestadística lacunar

Sea (k_r) una sucesión lacunar, es decir, $h_r = k_{r+1} - k_r$ diverge a ∞ cuando $r \rightarrow \infty$. Denotemos $I_r = (k_{r-1}, k_r]$. Una sucesión (f_k) de funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice que converge equi-estadísticamente lacunar a f si para todo $\varepsilon > 0$ la sucesión de funciones $S_r(\varepsilon, x)$ converge uniformemente a 0 cuando $r \rightarrow \infty$, donde la sucesión de funciones está definida por

$$S_r(\varepsilon, x) = \frac{1}{h_r} \{k \in I_r : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2016 Aloataibi, Mursaleen obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "equiestadística lacunar".

Convergencia equiestadística lacunar

Sea (k_r) una sucesión lacunar, es decir, $h_r = k_{r+1} - k_r$ diverge a ∞ cuando $r \rightarrow \infty$. Denotemos $I_r = (k_{r-1}, k_r]$. Una sucesión (f_k) de funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice que converge equi-estadísticamente lacunar a f si para todo $\varepsilon > 0$ la sucesión de funciones $S_r(\varepsilon, x)$ converge uniformemente a 0 cuando $r \rightarrow \infty$, donde la sucesión de funciones está definida por

$$S_r(\varepsilon, x) = \frac{1}{h_r} \{k \in I_r : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2019 Mohiuddine, Alamri obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "equi-estadística lacunar con pesos".

Convergencia equiestadística lacunar con pesos

Sea (k_r) una sucesión lacunar, es decir, $h_r = k_{r+1} - k_r$ diverge a ∞ cuando $r \rightarrow \infty$. Denotemos $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, y $p = (p_n)$ una sucesión de pesos. Una sucesión (f_k) converge equi-estadísticamente lacunar con pesos a f si para todo $\varepsilon > 0$ la sucesión de funciones $S_{r,p}(\varepsilon, x)$ converge uniformemente a 0 cuando $r \rightarrow \infty$, donde la sucesión de funciones está definida por

$$S_{r,p}(\varepsilon, x) = \frac{1}{h_r} \{k \in I_r : p_k |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...mas recientemente

2021 Jena, B.B., Paikray, S.K., Dutta, H. obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia " Cesàro estadística diferida ".

Convergencia Cesàro estadística diferida

Sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones $a_n \leq b_n$ y $b_n \rightarrow \infty$. Se definen las medias diferidas de Cesàro:

$D(a_n, b_n) = D(x_n) = (x_{a_n+1} + \cdots + x_{b_n}) / (b_n - a_n)$. Una sucesión (x_n) converge a L Cesàro estadísticamente diferidamente si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : a_n \leq k \leq b_n : \|D(x_k) - L\| > \varepsilon\}}{b_n - a_n} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...mas recientemente

2021 Jena, B.B., Paikray, S.K., Dutta, H. obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia " Cesàro estadística diferida ".

Convergencia Cesàro estadística diferida

Sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones $a_n \leq b_n$ y $b_n \rightarrow \infty$. Se definen las medias diferidas de Cesàro:

$D(a_n, b_n) = D(x_n) = (x_{a_n+1} + \cdots + x_{b_n})/(b_n - a_n)$. Una sucesión (x_n) converge a L Cesàro estadísticamente diferidamente si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : a_n \leq k \leq b_n : \|D(x_k) - L\| > \varepsilon\}}{b_n - a_n} = 0.$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2021 Srivastava-Jena-Paikray obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "Estadística diferida Nörlund".

Convergencia estadística diferida Nörlund

Sean $(a_n), (b_n), a_n \leq b_n$ y $b_n \rightarrow \infty$. Fijadas dos sucesiones $(p_n), (q_n)$ definimos $\mathcal{P}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} p_j$, $\mathcal{Q}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} q_j$ y la convolución $\mathcal{R}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} p_j q_{b_n-j}$. Una sucesión (x_n) converge Estadísticamente diferido Norlund si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \leq \mathcal{R}_n : p_{b_n-k} q_k \|x_k - L\| \geq \varepsilon\}}{\mathcal{R}_n} = 0$$

Teoremas de Korovkin y Métodos de sumabilidad

...algunos resultados

2021 Srivastava-Jena-Paikray obtuvo resultados de tipo Korovkin en el contexto de la convergencia "Estadística diferida Nörlund".

Convergencia estadística diferida Nörlund

Sean $(a_n), (b_n), a_n \leq b_n$ y $b_n \rightarrow \infty$. Fijadas dos sucesiones $(p_n), (q_n)$ definimos $\mathcal{P}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} p_j$, $\mathcal{Q}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} q_j$ y la convolución $\mathcal{R}_n = \sum_{j=a_n+1}^{b_n} p_j q_{b_n-j}$. Una sucesión (x_n) converge Estadísticamente diferido Norlund si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \leq \mathcal{R}_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\}}{\mathcal{R}_n} = 0$$

Cuestiones



Cuestión 1

¿Es posible unificar los resultados de tipo Korovkin anteriores?

Cuestión 2

¿Que condiciones debe satisfacer un método de sumabilidad para obtener un resultado de aproximación de tipo Korovkin?

Cuestiones

Cuestión 3

¿Es posible deducir de un resultado general de este tipo, resultados de tipo Korovkin para la convergencia definida a través de ideales en $\mathbb{N}$?

Cuestión 4

¿Es posible deducir de un resultado general de este tipo, resultados de tipo Korovkin para convergencias matriciales?

Métodos de sumabilidad

...que preservan...

Preservan desigualdades

Sea $\mathcal{R} : \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \subset X^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ un método de sumabilidad en X .

Supongamos que las sucesiones $(w_n), (x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ satisfacen

$$\|w_n - w\| \leq C(\|x_n - x\| + \|y_n - y\| + \|z_n - z\|) \quad (0.1)$$

para algunos vectores $w, x, y, z \in X$, alguna constante $C > 0$ y todos los enteros $n \geq 1$. Diremos que $\mathcal{R}$ preserve desigualdades si para cualesquiera sucesiones $(x_n), (y_n), (z_n)$ que satisfacen (0.1) y satisfacen $x_n \xrightarrow{\mathcal{R}} x, y_n \xrightarrow{\mathcal{R}} y, z_n \xrightarrow{\mathcal{R}} z$, se tiene que $w_n \xrightarrow{\mathcal{R}} w$.

Métodos de sumabilidad

...que preservan...

Preservan desigualdades de orden

Supongamos $(X, \leq)$ es un retículo de Banach provisto de una norma de retículos $\|\cdot\|$. Sea $\mathcal{R} : \mathcal{D}_{\mathcal{R}} \subset X^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ un método de sumabilidad. Supongamos que existen sucesiones

$(w_n), (x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} -C[(x_n - x) + (y_n - y) + (z_n - z)] &< w_n - w < \\ &< C[(x_n - x) + (y_n - y) + (z_n - z)] \end{aligned} \quad (0.2)$$

para alguna constante $C > 0$. Diremos que el método de sumabilidad $\mathcal{R}$ preserva desigualdades de orden si para cualesquiera sucesiones

$(x_n), (y_n), (z_n)$ satisfaciendo (0.2) y satisfaciendo $x_n \xrightarrow{\mathcal{R}} x, y_n \xrightarrow{\mathcal{R}} y, z_n \xrightarrow{\mathcal{R}} z$, se tiene que $w_n \xrightarrow{\mathcal{R}} w$.

Un resultado de Korovkin general

Primer Teorema de Korovkin general

Sea $\mathcal{R}$ un método de sumabilidad definido en el retículo de Banach de las funciones continuas $\mathcal{C}[0, 1]$ provisto de la norma del supremo. Supongamos que $\mathcal{R}$ preserva desigualdades o desigualdades de orden. Si (L_n) es una sucesión de operadores lineales positivos de $\mathcal{C}([0, 1])$ y con valores en $\mathcal{C}([0, 1])$ entonces para toda $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ y acotada en $\mathbb{R}$, se tiene $L_n f \xrightarrow{\mathcal{R}} f$ si y sólo si $L_n 1 \xrightarrow{\mathcal{R}} 1$, $L_n t \xrightarrow{\mathcal{R}} t$ y $L_n t^2 \xrightarrow{\mathcal{R}} t^2$.

Un resultado de Korovkin general



Segundo Teorema de Korovkin general

De igual modo se puede obtener un segundo Teorema de Korovkin para operadores definidos en $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ y métodos de sumabilidad que preservan desigualdades o desigualdades de orden.

Las condiciones sobre $\mathcal{R}$ no pueden eliminarse

Si consideremos los polinomios clásicos de Bernstein $B_n f(x)$.

Denotamos $\mathcal{P}[0, 1]$ el conjunto de polinomios definidos $[0, 1]$ y por $\bigvee \{1, t, t^2\}$ el subespacio vectorial generado por $1, t$ and t^2 .

Denotamos por $\mathcal{T} : \mathcal{P}[0, 1] \rightarrow \bigvee \{1, t, t^2\}$ la proyección estándar y consideramos el siguiente método de sumabilidad definido en

$\mathcal{P}[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1]$ como sigue: $p_n \xrightarrow{\mathcal{R}} f$ si y sólo si $\mathcal{T} p_n \rightarrow f$ uniformemente en $[0, 1]$ supuesto que dicho límite existe. Este método de sumabilidad no preserva desigualdades ni desigualdades de orden y la tesis del Th de Korovkin no es cierta para la sucesión B_n .

Método de convergencia a través de un ideal

Ideal

Diremos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es un ideal no trivial si:

1. $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y $\mathcal{I} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.
3. Si $A \subset B$ y $B \in \mathcal{I}$ entonces $A \in \mathcal{I}$.
4. Adicionalmente diremos que $\mathcal{I}$ es regular (o admisible) si contiene todos los subconjuntos finitos.

Método de convergencia a través de un ideal



Convergencia a través de un Ideal

Diremos que una sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ es $\mathcal{I}$ -convergente a $L \in \mathbb{R}$ ($L = \mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$) si para todo $\varepsilon > 0$ el subconjunto

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| > \varepsilon\} \in \mathcal{I}.$$

Método de convergencia a través de un ideal



Teorema

La convergencia a través de un ideal definida en un espacio de Banach X conserva desigualdades.

Corolario

Los resultados de Korovkin son ciertos si reemplazamos la convergencia usual por la convergencia a través de cualquier ideal no trivial.

Método de convergencia matricial regular

Método de convergencia matricial

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz infinita. Una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es A -sumable a L si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = L$.

Definición

Una matriz con entradas no negativas A se dice regular

1. $\sup_n \sum_j \alpha_{nj} < \infty$.
2. $\lim_n \alpha_{ni} = 0$.
3. $\lim_n \sum_i \alpha_{ni} = 1$.

Método de convergencia matricial regular



Teorema

Si A es una matriz regular, entonces la A convergencia preserva desigualdades de orden.

Corolario

Es posible establecer teoremas de tipo Korovkin para la convergencia matricial regular.

Referencias



1. F. León-Saavedra, M. del Carmen Listán-García, María Pilar Romero de la Rosa, *Korovkin-type approximation results through summability methods*, Preprint (2021), 1-18

Gracias por vuestra atención