Teoría de control aplicada a convertidores

Carmen Pérez Martínez

16 de octubre de 2021

Teoría de control aplicada a convertidores

Teoría de control aplicada a convertidores

Teoría de control aplicada a convertidores

Teoría de control aplicada a convertidores

Teoría de control aplicada a convertidores

Teoría de control aplicada a convertidores

¿Qué es un sistema de control?

$$\xrightarrow{\text{entrada } u} \boxed{\text{sistema}} \xrightarrow{\text{salida } x}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

donde u es la variable de control

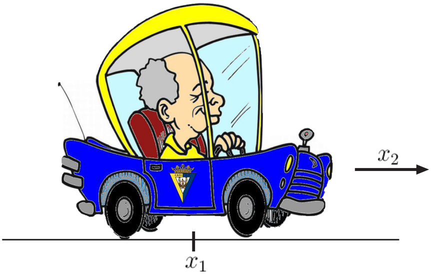
¿Qué es un sistema de control?

entrada u $\longrightarrow$ sistema salida x $\longrightarrow$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

donde u es la variable de control

Un coche



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

donde u es la fuerza de aceleración.

Idea geométrica

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$u : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$$

Idea geométrica

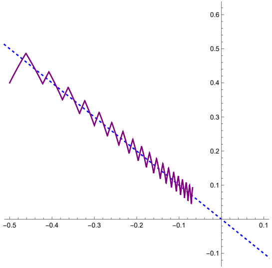
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$u : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$$

Idea geométrica

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

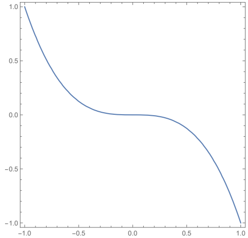
$$u : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$$

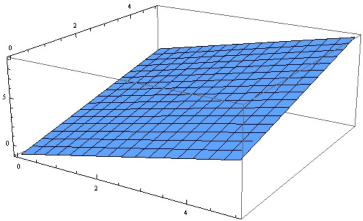


Superficie deslizante

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{diferenciable}$$

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$$





Diseño del control de deslizamiento

Sistema con control deslizante

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\widetilde{u}(x(t))$$

con $\widetilde{u} : D \subset \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$

- El control en este sistema se denomina **control de deslizamiento**
- Diremos que este sistema nos define el **movimiento de deslizamiento**

¿Cuándo se puede definir el control deslizante?

Teorema

La condición necesaria y suficiente para la existencia local de un área de deslizamiento sobre la variedad $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ y un control $\widetilde{u} : D \subset \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, es que se verifique:

$$0 < \frac{-\nabla h(x) \cdot f(x)}{\nabla h(x) \cdot g(x)} < 1$$

Sistema auxiliar

Sistema auxiliar

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t)) + g(x^*(t))u_{eq}(x^*(t))$$

- El control en este sistema se denomina **control equivalente**
- Diremos que este sistema nos define el **movimiento ideal**

Propiedad de invarianza

$$h(x^*(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty)$$

Sistema auxiliar

Sistema auxiliar

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t)) + g(x^*(t))u_{eq}(x^*(t))$$

- El control en este sistema se denomina **control equivalente**
- Diremos que este sistema nos define el **movimiento ideal**

Propiedad de invarianza

$$h(x^*(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty)$$

Sistema auxiliar

Sistema auxiliar

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t)) + g(x^*(t))u_{eq}(x^*(t))$$

- El control en este sistema se denomina **control equivalente**
- Diremos que este sistema nos define el **movimiento ideal**

Propiedad de invarianza

$$h(x^*(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty)$$

Definimos el control equivalente

$$u_{eq} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,,$$

$$u_{eq}(x^*) = \frac{-\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$$

¿Cuándo se puede definir el control deslizante?

Con la definición de control equivalente, el teorema anterior nos queda:

Teorema

La condición necesaria y suficiente para la existencia local de un área de deslizamiento sobre la variedad $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ y un control $\widetilde{u} : D \subset \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, es que se verifique:

$$0 < u_{eq}(x) < 1$$

¿Cuándo se puede definir el control deslizante?

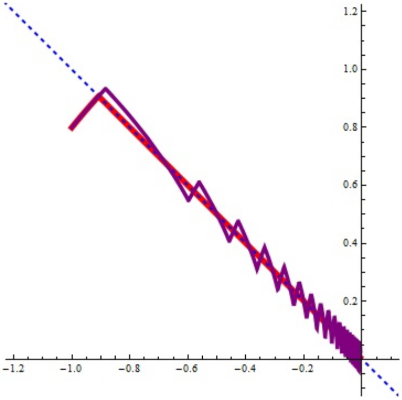
Con la definición de control equivalente, el teorema anterior nos queda:

Teorema

La condición necesaria y suficiente para la existencia local de un área de deslizamiento sobre la variedad $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ y un control $\widetilde{u} : D \subset \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, es que se verifique:

$$0 < u_{eq}(x) < 1$$

¿Se “parecen” las soluciones?



¿Se “parecen” las soluciones?

Teorema

Hipótesis:

1. Existe x solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)\tilde{u}(x)$ para la que se verifica $|h(x(t))| \leq \Delta$, $t \in [0, T]$, $\Delta > 0$.
2. $f(x^*) - g(x^*)\dfrac{\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$, $\nabla h(x) \cdot g(x^*) \neq 0$, es de Lipschitz.
3. para $g(x)\dfrac{1}{\nabla h(x) \cdot g(x)}$ existen las derivadas parciales y están acotadas en un dominio acotado.
4. Existen $M, N > 0$ tales que $\|f(x) + g(x)\tilde{u}\| \leq M + N\|x\|$.

¿Se “parecen” las soluciones?

Teorema

Hipótesis:

1. Existe x solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$ para la que se verifica $|h(x(t))| \leq \Delta$, $t \in [0, T]$, $\Delta > 0$.
2. $f(x^*) - g(x^*)\dfrac{\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$, $\nabla h(x) \cdot g(x^*) \neq 0$, es de Lipschitz.
3. para $g(x)\dfrac{1}{\nabla h(x) \cdot g(x)}$ existen las derivadas parciales y están acotadas en un dominio acotado.
4. Existen $M, N > 0$ tales que $\left\|f(x) + g(x)\widetilde{u}\right\| \leq M + N\left\|x\right\|$.

¿Se "parecen" las soluciones?

Teorema

Hipótesis:

1. Existe x solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$ para la que se verifica $|h(x(t))| \leq \Delta$, $t \in [0, T]$, $\Delta > 0$.
2. $f(x^*) - g(x^*)\dfrac{\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$, $\nabla h(x) \cdot g(x^*) \neq 0$, es de Lipschitz.
3. para $g(x)\dfrac{1}{\nabla h(x) \cdot g(x)}$ existen las derivadas parciales y están acotadas en un dominio acotado.
4. Existen $M, N > 0$ tales que $\left\|f(x) + g(x)\widetilde{u}\right\| \leq M + N\left\|x\right\|$.

¿Se “parecen” las soluciones?

Teorema

Hipótesis:

1. Existe x solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$ para la que se verifica $|h(x(t))| \leq \Delta$, $t \in [0, T]$, $\Delta > 0$.
2. $f(x^*) - g(x^*)\dfrac{\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$, $\nabla h(x) \cdot g(x^*) \neq 0$, es de Lipschitz.
3. para $g(x)\dfrac{1}{\nabla h(x) \cdot g(x)}$ existen las derivadas parciales y están acotadas en un dominio acotado.
4. Existen $M, N > 0$ tales que $\left\|f(x) + g(x)\widetilde{u}\right\| \leq M + N\|x\|$.

¿Se “parecen” las soluciones?

Teorema

Hipótesis:

1. Existe x solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$ para la que se verifica $|h(x(t))| \leq \Delta$, $t \in [0, T]$, $\Delta > 0$.
2. $f(x^*) - g(x^*)\dfrac{\nabla h(x^*) \cdot f(x^*)}{\nabla h(x^*) \cdot g(x^*)}$, $\nabla h(x) \cdot g(x^*) \neq 0$, es de Lipschitz.
3. para $g(x)\dfrac{1}{\nabla h(x) \cdot g(x)}$ existen las derivadas parciales y están acotadas en un dominio acotado.
4. Existen $M, N > 0$ tales que $\left\| f(x) + g(x)\widetilde{u} \right\| \leq M + N \left\| x \right\|$.

Convergencia

Sistema con deslizamiento

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$$

Sistema auxiliar

$$\dot{x}^* = f(x^*) + g(x^*)u_{eq}(x^*)$$

Teorema

Bajo la condición:

$$\|x(0) - x^*(0)\| \leq P\Delta$$

Existe $H > 0$ tal que

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq H\Delta \text{ para } t \in [0, T]$$

Convergencia

Sistema con deslizamiento

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\widetilde{u}(x)$$

Sistema auxiliar

$$\dot{x}^* = f(x^*) + g(x^*)u_{eq}(x^*)$$

Teorema

Bajo la condición:

$$\|x(0) - x^*(0)\| \leq P\Delta$$

Existe $H > 0$ tal que

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq H\Delta \text{ para } t \in [0, T]$$

Convertidores

Antes de empezar

- ¿Qué son?
- Funcionamiento
- Distintos tipos: Boost, Buck-Boost, ...

Convertidores

Antes de empezar

- ¿Qué son?
- Funcionamiento
- Distintos tipos: Boost, Buck-Boost, ...

Convertidores

Antes de empezar

- ¿Qué son?
- Funcionamiento
- Distintos tipos: Boost, Buck-Boost, ...

Convertidor Boost

Modelo convertidor Boost

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}(t) = -(1-u(t))v(t) + E \\ C\dfrac{dv}{dt}(t) = \dfrac{1}{R}v(t) + (1-u(t))i(t) \end{cases}$$

- i es la intensidad de entrada
- v es el voltaje de salida
- $\overline{v}$ es el voltaje deseado

Convertidor Boost

Modelo convertidor Boost

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}(t) = -(1-u(t))v(t) + E \\ C\dfrac{dv}{dt}(t) = \dfrac{1}{R}v(t) + (1-u(t))i(t) \end{cases}$$

- i es la intensidad de entrada
- v es el voltaje de salida
- $\overline{v}$ es el voltaje deseado

Convertidor Boost

Normalización

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E}\sqrt{\frac{L}{C}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} , \qquad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Convertidor Boost

Modelo normalizado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - u x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{Q} x_2 + u x_1 \end{cases} \quad \text{con} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- x_1 es la intensidad de entrada normalizada
- x_2 es el voltaje de salida normalizado
- $\overline{x}_2$ es el voltaje normalizado deseado

Convertidor Boost

Control directo: $h(x) = x_2 - \overline{x}_2$

- $\nabla h(x) = (0, 1)$
- $\nabla h(x) \cdot f(x) = \left\langle (0,1)\ ,\ (1, -\dfrac{1}{Q}x_2) \right\rangle = -\dfrac{1}{Q}x_2$
- $\nabla h(x) \cdot g(x) = \langle (0,1)\ ,\ (-x_2, x_1) \rangle = x_1$
- $u_{eq}(x_1, x_2) = -\dfrac{-\dfrac{1}{Q}x_2}{x_1} = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < x_1 Q\}$

Convertidor Boost

Control directo: $h(x) = x_2 - \overline{x}_2$

- $\nabla h(x) = (0, 1)$
- $\nabla h(x) \cdot f(x) = \left\langle (0,1)\ ,\ (1, -\dfrac{1}{Q}x_2) \right\rangle = -\dfrac{1}{Q}x_2$
- $\nabla h(x) \cdot g(x) = \langle (0,1)\ ,\ (-x_2, x_1) \rangle = x_1$
- $u_{eq}(x_1, x_2) = -\dfrac{-\dfrac{1}{Q}x_2}{x_1} = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$

  $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < x_1 Q\}$

Convertidor Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_2^* = \overline{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1 \\ \dot{x}_2^* = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2^2}{Q}, \overline{x}_2\right)$$

Convertidor Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_2^* = \overline{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1 \\ \dot{x}_2^* = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2^2}{Q}, \overline{x}_2\right)$$

Convertidor Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_2^* = \overline{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1 \\ \dot{x}_2^* = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2^2}{Q}, \overline{x}_2\right)$$

Convertidor Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_1} = \frac{\overline{x}_2^2}{Q} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_1^* = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1$$

Se puede demostrar que x_{0_1} es inestable.

Convertidor Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_1} = \frac{\overline{x}_2^2}{Q} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_1^* = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1$$

Se puede demostrar que x_{0_1} es inestable.

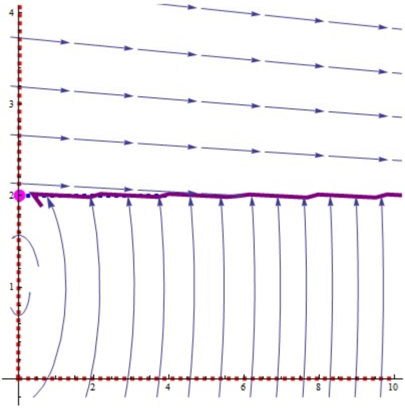
Convertidor Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_1} = \frac{\overline{x}_2^2}{Q} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_1^* = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\overline{x}_2^2}{x_1^*}\right) + 1$$

Se puede demostrar que x_{0_1} es inestable.

Convertidor Boost



- $L = 15{,}91 mH$
- $C = 50\mu C$
- $R = 52\Omega$
- $E = 12V$
- $\overline{v} = 24V \quad \rightarrow \quad \overline{x}_2 = 2$
- $\overline{i} = 0{,}923A \quad \rightarrow \quad \overline{x}_1 = 0{,}043$
- como $\nabla h(x) \cdot g(x) > 0$

$$\widetilde{u} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_2 - \overline{x}_2 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x_2 - \overline{x}_2 > 0 \end{cases}$$

Convertidor Buck-Boost

Modelo convertidor Buck-Boost

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}(t) = (1-u(t))v(t) + uE \\ C\dfrac{dv}{dt}(t) = -(1-u(t))i(t) - \dfrac{v(t)}{R} \end{cases}$$

- i es la intensidad de entrada
- v es el voltaje de salida
- $\overline{v}$ es el voltaje deseado

Convertidor Buck-Boost

Modelo convertidor Buck-Boost

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}(t) = (1-u(t))v(t) + uE \\ C\dfrac{dv}{dt}(t) = -(1-u(t))i(t) - \dfrac{v(t)}{R} \end{cases}$$

- i es la intensidad de entrada
- v es el voltaje de salida
- $\overline{v}$ es el voltaje deseado

Convertidor Buck-Boost

Normalización

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E}\sqrt{\frac{L}{C}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} , \qquad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Convertidor Buck-Boost

Modelo normalizado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + (1 - x_2)u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \dfrac{x_2}{Q} + x_1 u \end{cases} \quad \text{con} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- x_1 es la intensidad de entrada normalizada
- x_2 es el voltaje de salida normalizado
- $\overline{x}_2$ es el voltaje normalizado deseado

Convertidor Buck-Boost

Modelo normalizado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + (1 - x_2)u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \dfrac{x_2}{Q} + x_1 u \end{cases} \quad \text{con} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- x_1 es la intensidad de entrada normalizada
- x_2 es el voltaje de salida normalizado
- $\overline{x}_2$ es el voltaje normalizado deseado

Convertidor Buck-Boost

Control indirecto: $h(x) = x_1 - \overline{x}_1$

- $\nabla h(x) = (1, 0)$
- $\nabla h(x) \cdot f(x) = \left\langle (1\ ,\ 0)\ ,\ (x_2\ ,\ -x_1 - \frac{x_2}{Q}) \right\rangle = x_2$
- $\nabla h(x) \cdot g(x) = \langle (1\ ,\ 0)\ ,\ (1 - x_2\ ,\ x_1) \rangle = 1 - x_2$
- $u_{eq}(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{1 - x_2} = \frac{-x_2}{1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$

Convertidor Buck-Boost

Control indirecto: $h(x) = x_1 - \overline{x}_1$

- $\nabla h(x) = (1, 0)$
- $\nabla h(x) \cdot f(x) = \left\langle (1\ ,\ 0)\ ,\ (x_2\ ,\ -x_1 - \dfrac{x_2}{Q}) \right\rangle = x_2$
- $\nabla h(x) \cdot g(x) = \langle (1\ ,\ 0)\ ,\ (1 - x_2\ ,\ x_1) \rangle = 1 - x_2$
- $u_{eq}(x_1, x_2) = -\dfrac{x_2}{1 - x_2} = \dfrac{-x_2}{1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$

Convertidor Buck-Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_1 = \overline{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = 0 \\ \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \dfrac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \dfrac{-x_2^*}{1 - x_2^*} \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1)}{Q}, \overline{x}_2 \right)$$

Convertidor Buck-Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_1 = \overline{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = 0 \\ \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \dfrac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \dfrac{-x_2^*}{1 - x_2^*} \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1)}{Q}, \overline{x}_2 \right)$$

Convertidor Buck-Boost

Movimiento ideal

- u_{eq}
- $x_1 = \overline{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = 0 \\ \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \dfrac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \dfrac{-x_2^*}{1 - x_2^*} \end{cases} \quad \text{con} \quad x_0 = \left(\frac{\overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1)}{Q}, \overline{x}_2 \right)$$

Convertidor Buck-Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_2} = \overline{x}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \frac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \frac{-x_2^*}{1 - x_2^*}$$

Se puede demostrar que x_{0_2} es estable.

Convertidor Buck-Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_2} = \overline{x}_2 \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \frac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \frac{-x_2^*}{1 - x_2^*}$$

Se puede demostrar que x_{0_2} es estable.

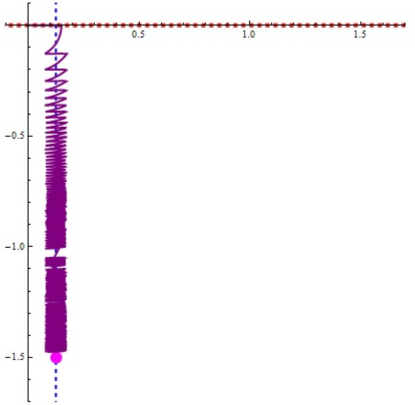
Convertidor Buck-Boost

Estabilidad del movimiento ideal

$$x_{0_2} = \overline{x}_2 \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_2^* = -\overline{x}_1 - \frac{x_2^*}{Q} + \overline{x}_1 \frac{-\,x_2^*}{1 - x_2^*}$$

Se puede demostrar que x_{0_2} es estable.

Convertidor Buck-Boost

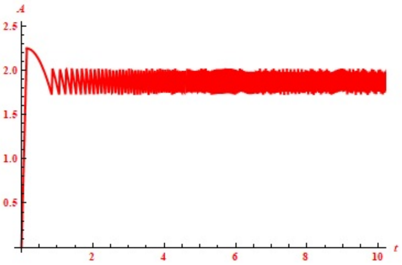


- $L = 20mH$
- $C = 20\mu C$
- $R = 30\Omega$
- $E = 15V$
- $\bar{i} = 1{,}875A \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1 = 0{,}125$
- $\bar{v} = -22{,}5V \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2 = -1{,}5$
- como $\nabla h(x) \cdot g(x) > 0$

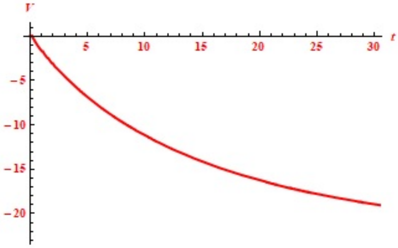
$$\tilde{u} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_1 - \bar{x}_1 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x_1 - \bar{x}_1 > 0 \end{cases}$$

Convertidor Buck-Boost

Desnormalizando:



Comportamiento variable i



Comportamiento variable v

Bibliografía

- Andrei A. Agrachev, Eduardo D. Sontag, Vadim I. Utkin, A. Stephen Morse, Héctor J. Sussmann, “Nonlinear and Optimal Control Theory”, Springer. (2004).
- Vadim I. Utkin, “Sliding Modes in Control and Optimization”, Springer-Verlag (1991).
- H. Sira Ramírez, R. Silva Ortigoza, “Control Design Techniques in Power Electronics Devices”, Springer (2006).

Muchas gracias.