A new stability bound for the fixed point property in Hilbert spaces

Fernando Rambla
Universidad de Cádiz

Miniworkshop "Órbitas en Análisis Matemático"
Jerez de la Frontera, 15–16 de octubre de 2021

UCA Universidad de Cádiz

Junta de Andalucía
Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades

UNIÓN EUROPEA
Fondo Europeo de Desarrollo Regional

Andalucía se mueve con Europa

Contenido

Contenido

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$.

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \, \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. *Si* $T : B_X \to B_X$ *es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe* $x \in B_X$ *tal que* $Tx = x$*)*

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. X *es espacio de Banach*
2. $C \subseteq X$ *es convexo, compacto, no vacío*
3. *y* $T : C \to C$ *es continua*

entonces T *tiene punto fijo.*

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. X *es espacio métrico completo*
2. $C \subseteq X$ *es cerrado, no vacío*
3. *y* $T : C \to C$ *es* k*-lipschitziana con* $k < 1$

entonces T *tiene punto fijo.*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

entonces T tiene punto fijo.

Conjetura (c. 1965)

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. *Si* $T : B_X \to B_X$ *es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe* $x \in B_X$ *tal que* $Tx = x$*)*

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. X *es espacio de Banach*
2. $C \subseteq X$ *es convexo, compacto, no vacío*
3. *y* $T : C \to C$ *es continua*

entonces T *tiene punto fijo.*

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. X *es espacio métrico completo*
2. $C \subseteq X$ *es cerrado, no vacío*
3. *y* $T : C \to C$ *es* k*-lipschitziana con* $k < 1$

entonces T *tiene punto fijo.*

Conjetura (c. 1965)

Si

1. X *es espacio de Banach* **reflexivo**

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

entonces T tiene punto fijo.

Conjetura (c. 1965)

Si

1. *X es espacio de Banach* **reflexivo**
2. *$C \subseteq X$ es* **convexo, cerrado y acotado**

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

entonces T tiene punto fijo.

Conjetura (c. 1965)

Si

1. *X es espacio de Banach* **reflexivo**
2. *$C \subseteq X$ es* **convexo, cerrado y acotado**
3. *y $T : C \to C$ es* **1***-lipschitziana*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

entonces T tiene punto fijo.

Conjetura (c. 1965)

Si

1. *X es espacio de Banach* **reflexivo**
2. *$C \subseteq X$ es* **convexo, cerrado y acotado**
3. *y $T : C \to C$ es* $\mathbf{1}$*-lipschitziana (la llamaremos “no expansiva”)*

Teorema (Brouwer, 1912)

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Si $T : B_X \to B_X$ es continua entonces tiene punto fijo (i.e. existe $x \in B_X$ tal que $Tx = x$)

Teorema (Schauder, 1930)

Si

1. *X es espacio de Banach*
2. *$C \subseteq X$ es convexo, compacto, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es continua*

entonces T tiene punto fijo.

Teorema (Banach, 1922)

Si

1. *X es espacio métrico completo*
2. *$C \subseteq X$ es cerrado, no vacío*
3. *y $T : C \to C$ es k-lipschitziana con $k < 1$*

entonces T tiene punto fijo.

Conjetura (c. 1965)

Si

1. *X es espacio de Banach* **reflexivo**
2. *$C \subseteq X$ es* **convexo, cerrado y acotado**
3. *y $T : C \to C$ es* **1***-lipschitziana (la llamaremos “no expansiva”)*

entonces T tiene punto fijo.

Para fijar ideas, se da nombre a los espacios de Banach que satisfacen la conclusión de la conjetura anterior.

Para fijar ideas, se da nombre a los espacios de Banach que satisfacen la conclusión de la conjetura anterior.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo (**FPP**)

Para fijar ideas, se da nombre a los espacios de Banach que satisfacen la conclusión de la conjetura anterior.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva,

Para fijar ideas, se da nombre a los espacios de Banach que satisfacen la conclusión de la conjetura anterior.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Para fijar ideas, se da nombre a los espacios de Banach que satisfacen la conclusión de la conjetura anterior.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Observación

En toda la exposición, debe tenerse en cuenta que T **puede ser no lineal**.

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|/T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| / T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|/T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.
Ahora podemos formular uno de los mayores avances en la conjetura.

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| / T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.
Ahora podemos formular uno de los mayores avances en la conjetura.

Teorema (Domínguez-Benavides, 2009)

Sea X espacio de Banach reflexivo.

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| / T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.
Ahora podemos formular uno de los mayores avances en la conjetura.

Teorema (Domínguez-Benavides, 2009)

Sea X espacio de Banach reflexivo. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un espacio de Banach Y que

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|/T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.
Ahora podemos formular uno de los mayores avances en la conjetura.

Teorema (Domínguez-Benavides, 2009)

Sea X espacio de Banach reflexivo. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un espacio de Banach Y que

- *es isomorfo a X, además con $d(X, Y) < 1 + \varepsilon$;*

Por otra parte, recordemos que la distancia entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|/T : X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

No es una métrica per se; sin embargo, su logaritmo se comporta como una pseudométrica.
Ahora podemos formular uno de los mayores avances en la conjetura.

Teorema (Domínguez-Benavides, 2009)

Sea X espacio de Banach reflexivo. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un espacio de Banach Y que

- *es isomorfo a X, además con $d(X, Y) < 1 + \varepsilon$;*
- *tiene la FPP.*

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos.

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach isomorfos y denotemos la norma en X por $\| \ \|$.

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach isomorfos y denotemos la norma en X por $\| \ \|$. Dado $B \geq 1$, son equivalentes:

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach isomorfos y denotemos la norma en X por $\| \ \|$. Dado $B \geq 1$, son equivalentes:

- $d(X, Y) \leq B$.

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach isomorfos y denotemos la norma en X por $\| \ \|$. Dado $B \geq 1$, son equivalentes:

- *$d(X, Y) \leq B$.*
- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una norma $| \ |$ en X tal que para cada $x \in X$ se tiene*
$$\|x\| \leq |x| \leq (B + \varepsilon)\|x\|$$

Por otra parte, existe una relación muy estrecha entre la noción de norma equivalente y la distancia entre espacios isomorfos. A saber,

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach isomorfos y denotemos la norma en X por $\| \ \|$. Dado $B \geq 1$, son equivalentes:

- *$d(X, Y) \leq B$.*
- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una norma $| \ |$ en X tal que para cada $x \in X$ se tiene*
$$\|x\| \leq |x| \leq (B + \varepsilon)\|x\|$$
y además Y es linealmente isométrico a $(X, | \ |)$.

Contenido

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad":

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP?

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la “estabilidad”: Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un “radio” $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.
- Sin embargo, ni siquiera estamos seguros de esto para todo espacio de Hilbert.

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la “estabilidad”: Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un “radio” $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.
- Sin embargo, ni siquiera estamos seguros de esto para todo espacio de Hilbert. En otras palabras,

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.
- Sin embargo, ni siquiera estamos seguros de esto para todo espacio de Hilbert. En otras palabras,

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si X es isomorfo a un espacio de Hilbert entonces X tiene la FPP.

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.
- Sin embargo, ni siquiera estamos seguros de esto para todo espacio de Hilbert. En otras palabras,

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si X es isomorfo a un espacio de Hilbert entonces X tiene la FPP.

Es conocido que la FPP en espacios reflexivos está "separablemente determinada", y de esto se deduce una forma equivalente (aunque más simple de abordar) de la conjetura:

- Una forma de abordar nuestra conjetura inicial es estudiar la "estabilidad": Para un espacio concreto X que tenga la FPP, ¿existe un "radio" $r > 1$ tal que si $d(X, Y) < r$ entonces Y también tiene la FPP? Si es así, ¿cuál es el mayor de dichos radios?
- Observemos que lo que afirma dicha conjetura es que dicho radio es infinito para todo espacio reflexivo.
- Sin embargo, ni siquiera estamos seguros de esto para todo espacio de Hilbert. En otras palabras,

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si X es isomorfo a un espacio de Hilbert entonces X tiene la FPP.

Es conocido que la FPP en espacios reflexivos está "separablemente determinada", y de esto se deduce una forma equivalente (aunque más simple de abordar) de la conjetura:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si X es isomorfo a ℓ_2 entonces X tiene la FPP.

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$.

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2.

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2. Si

$$d(X, \ell_2) < \sqrt{3} \cong 1.732$$

Veamos a continuación una de las primeras respuestas parciales; fue obtenida en el caso, más general, de espacios ℓ_p:

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2. Si

$$d(X, \ell_2) < \sqrt{3} \cong 1.732$$

entonces X tiene la FPP.

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente.

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el “radio de estabilidad” para ℓ_2 es, al menos:

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$	$\cong 2.135$	Mazcuñán (2006)

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$	$\cong 2.135$	Mazcuñán (2006)
B_0	$\cong 2.138$	Rambla (2021)

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el “radio de estabilidad” para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$	$\cong 2.135$	Mazcuñán (2006)
B_0	$\cong 2.138$	Rambla (2021)

…siendo $B_0 =$

En los años que siguieron, el resultado de T. Domínguez se fue mejorando, aunque cada vez más lentamente. De forma resumida, el "radio de estabilidad" para ℓ_2 es, al menos:

$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$	$\cong 2.135$	Mazcuñán (2006)
B_0	$\cong 2.138$	Rambla (2021)

…siendo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12+7\sqrt{2}+\sqrt{6\left(19+12\sqrt{2}\right)}}$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \;\|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \;|$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$.

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ *la norma euclídea en* ℓ_2 *y consideremos también una norma equivalente* $| \ |$ *satisfaciendo* $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ *para cierto* $B \geq 1$ *y cada* $x \in \ell_2$. *Si* $(\ell_2, | \ |)$ *no tiene la FPP entonces*

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces

($\mathcal{P}_0$) *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0, 1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \;\|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \;|$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \;|)$ no tiene la FPP entonces

$(\mathcal{P}_0)$ *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0,1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$(\mathcal{P}_1)$ $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces

$(\mathcal{P}_0)$ *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0, 1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$(\mathcal{P}_1)$ $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

$(\mathcal{P}_2)$ $D - \varepsilon \leq \|x_n\| \leq D + \varepsilon \leq \|w_n\| + 2\varepsilon$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces

($\mathcal{P}_0$) *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0, 1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

($\mathcal{P}_1$) $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

($\mathcal{P}_2$) $D - \varepsilon \leq \|x_n\| \leq D + \varepsilon \leq \|w_n\| + 2\varepsilon$

($\mathcal{P}_3$) $\|w_n - w_0\|^2 \leq \frac{(1-r)^2}{2} + \varepsilon$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces

$(\mathcal{P}_0)$ *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0,1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$(\mathcal{P}_1)$ $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

$(\mathcal{P}_2)$ $D - \varepsilon \leq \|x_n\| \leq D + \varepsilon \leq \|w_n\| + 2\varepsilon$

$(\mathcal{P}_3)$ $\|w_n - w_0\|^2 \leq \frac{(1-r)^2}{2} + \varepsilon$

$(\mathcal{P}_4)$ $|w_n - w_0| \leq 1 - r$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\|\ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $|\ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, |\ |)$ no tiene la FPP entonces

($\mathcal{P}_0$) *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0, 1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

($\mathcal{P}_1$) $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

($\mathcal{P}_2$) $D - \varepsilon \leq \|x_n\| \leq D + \varepsilon \leq \|w_n\| + 2\varepsilon$

($\mathcal{P}_3$) $\|w_n - w_0\|^2 \leq \frac{(1-r)^2}{2} + \varepsilon$

($\mathcal{P}_4$) $|w_n - w_0| \leq 1 - r$

($\mathcal{P}_5$) $|w_0| \geq r - \varepsilon$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\|\ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $|\ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, |\ |)$ no tiene la FPP entonces

($\mathcal{P}_0$) *Existe $D > 0$ y, para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in [0,1]$, sucesiones $(x_n)_n$, $(w_n)_n \subseteq \ell_2$, y $w_0 \in \ell_2$ tales que $(x_n)_n$ es débilmente nula, $w_n \xrightarrow{w} w_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,*

($\mathcal{P}_1$) $|x_n| \geq 1 - \varepsilon$

($\mathcal{P}_2$) $D - \varepsilon \leq \|x_n\| \leq D + \varepsilon \leq \|w_n\| + 2\varepsilon$

($\mathcal{P}_3$) $\|w_n - w_0\|^2 \leq \frac{(1-r)^2}{2} + \varepsilon$

($\mathcal{P}_4$) $|w_n - w_0| \leq 1 - r$

($\mathcal{P}_5$) $|w_0| \geq r - \varepsilon$

($\mathcal{P}_6$) $|x_n - w_n| \leq r + \varepsilon$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B.

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \; \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \; |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \; |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{1}{B^2} \leq D^2 \leq \frac{B^2 - 1}{3B^2 - 2}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \;\|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \;|$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \;|)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{1}{B^2} \leq D^2 \leq \frac{B^2 - 1}{3B^2 - 2} \Rightarrow B \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} \qquad \text{(JM y LlF, 2000)}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \; \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \; |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \; |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{1}{B^2 - 1} \leq D^2 \leq \frac{B^2 - 1}{3B^2 - 2}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{1}{B^2-1} \leq D^2 \leq \frac{B^2-1}{3B^2-2} \Rightarrow B \geq \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} \qquad \text{(Lin, 1999)}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{B^2 - 1}{B^2\left(B^2 - 2\right)} \leq D^2 \leq \frac{B^2 - 1}{3B^2 - 2}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para “emparedar” D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{B^2 - 1}{B^2\left(B^2 - 2\right)} \leq D^2 \leq \frac{B^2 - 1}{3B^2 - 2} \Rightarrow B \geq \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{2}} \qquad \text{(Mazcuñán, 2006)}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\|\ \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $|\ |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, |\ |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para “emparedar” D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{B^2 - 1}{B^2\left(B^2 - 2\right)} \leq D^2 \leq \frac{4B^4 + 9B^2 - 10 + 4(B^2 - 1)\sqrt{(B^2 - 2)(B^2 - 4)}}{\left(5B^2 - 2\right)^2}$$

Las mejores cotas se obtienen todas del mismo modo:

Lema

Sea $\| \; \|$ la norma euclídea en ℓ_2 y consideremos también una norma equivalente $| \; |$ satisfaciendo $\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$ para cierto $B \geq 1$ y cada $x \in \ell_2$. Si $(\ell_2, | \; |)$ no tiene la FPP entonces cumple las propiedades $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

A continuación se procede a usar $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ para "emparedar" D^2 entre dos expresiones que dependen de B, y a partir de esto se obtiene una desigualdad que permite acotar inferiormente B. En concreto,

$$\frac{B^2-1}{B^2\left(B^2-2\right)} \leq D^2 \leq \frac{4B^4+9B^2-10+4(B^2-1)\sqrt{(B^2-2)(B^2-4)}}{\left(5B^2-2\right)^2}$$

$$\Rightarrow B \geq \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12+7\sqrt{2}+\sqrt{6\left(19+12\sqrt{2}\right)}} \qquad \text{(Rambla, 2021)}$$

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$(\ell_2, |\ |)$ carece de la FPP

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$(\ell_2, |\ |)$ carece de la FPP $\Rightarrow$ se cumplen $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$$(\ell_2, |\ |) \text{ carece de la FPP} \Rightarrow \text{se cumplen } (\mathcal{P}_0) \text{ hasta } (\mathcal{P}_6) \Rightarrow B \geq B_0$$

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$$(\ell_2, |\ |) \text{ carece de la FPP} \Rightarrow \text{se cumplen } (\mathcal{P}_0) \text{ hasta } (\mathcal{P}_6) \Rightarrow B \geq B_0$$

Cabe pensar lo siguiente ...

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$$(\ell_2, |\ |) \text{ carece de la FPP} \Rightarrow \text{se cumplen } (\mathcal{P}_0) \text{ hasta } (\mathcal{P}_6) \Rightarrow B \geq B_0$$

Cabe pensar lo siguiente . . . “Si encuentro un renormamiento de ℓ_2 donde se cumplan $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ y sin embargo sea $B \leq B_0$, entonces esto significará que

Resumiendo, acabamos de ver que si una norma $|\ |$ en ℓ_2 satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq B\|x\|$$

para cierto $B \geq 1$, entonces se tiene la cadena de implicaciones:

$$(\ell_2, |\ |) \text{ carece de la FPP} \Rightarrow \text{se cumplen } (\mathcal{P}_0) \text{ hasta } (\mathcal{P}_6) \Rightarrow B \geq B_0$$

Cabe pensar lo siguiente ... "Si encuentro un renormamiento de ℓ_2 donde se cumplan $(\mathcal{P}_0)$ hasta $(\mathcal{P}_6)$ y sin embargo sea $B \leq B_0$, entonces esto significará que ¡¡la segunda implicación no puede mejorarse!!"

Consideremos de nuevo $B_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Consideremos de nuevo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

Consideremos de nuevo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\left\{\|x\|,\right.$$

Consideremos de nuevo $B_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12+7\sqrt{2}+\sqrt{6\left(19+12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1)+x(2)|,$$

Consideremos de nuevo $B_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.
Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1) + x(2)|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 - 1}} \max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2 - 2} + x(2n+2)|\}\Big\}$$

Consideremos de nuevo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|, \frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1) + x(2)|, \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2-1}}\max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2 - 2} + x(2n+2)|\}\Big\}$$

Es sencillo probar que $|\ |$ es una norma equivalente a la norma euclídea usual $\|\ \|$.

Consideremos de nuevo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1) + x(2)|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 - 1}} \max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2 - 2} + x(2n+2)|\}\Big\}$$

Es sencillo probar que $|\ |$ es una norma equivalente a la norma euclídea usual $\|\ \|$. Más aún:

Consideremos de nuevo $B_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12 + 7\sqrt{2} + \sqrt{6\left(19 + 12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|,\quad \frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1) + x(2)|,\quad \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 - 1}}\max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2 - 2} + x(2n+2)|\}\Big\}$$

Es sencillo probar que $|\ |$ es una norma equivalente a la norma euclídea usual $\|\ \|$. Más aún:

Teorema

En $(\ell_2, |\ |)$ se satisfacen las propiedades $\mathcal{P}_0$ hasta $\mathcal{P}_6$.

Consideremos de nuevo $B_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12+7\sqrt{2}+\sqrt{6\left(19+12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Big\{\|x\|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1)+x(2)|,$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_0^2-1}}\max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2-2}+x(2n+2)|\}\Big\}$$

Es sencillo probar que $|\ |$ es una norma equivalente a la norma euclídea usual $\|\ \|$. Más aún:

Teorema

En $(\ell_2, |\ |)$ se satisfacen las propiedades $\mathcal{P}_0$ hasta $\mathcal{P}_6$. Además,

$$\|u\| \leq |u| \leq B_0\|u\|$$

para cada $u \in \ell_2$

Consideremos de nuevo $B_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{12+7\sqrt{2}+\sqrt{6\left(19+12\sqrt{2}\right)}}$.

Definimos en ℓ_2 la siguiente norma:

$$|x| = \max\Bigg\{\|x\|, \quad \frac{B_0}{\sqrt{2}}|x(1)+x(2)|, \quad \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2-1}}\max_{n\in\mathbb{N}}\{|x(2n+1)\sqrt{B_0^2-2}+x(2n+2)|\}\Bigg\}$$

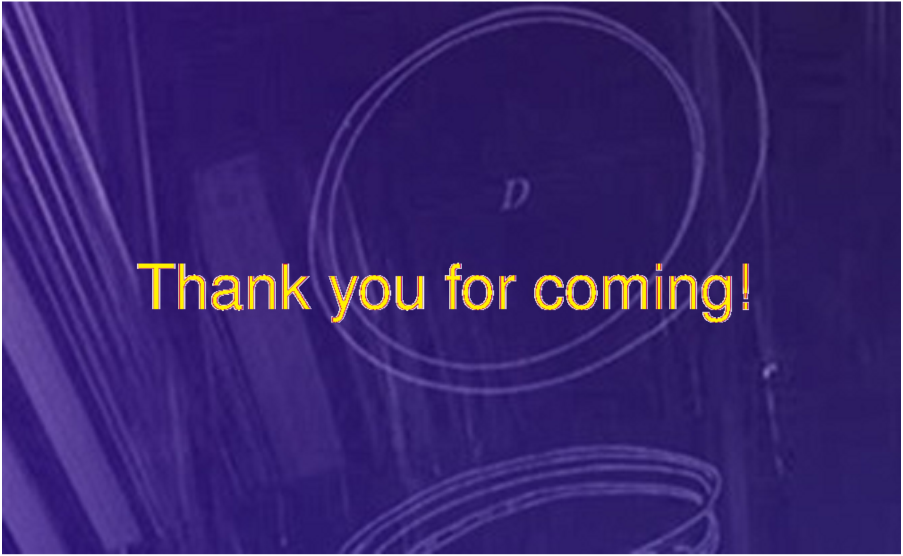
Es sencillo probar que $|\ |$ es una norma equivalente a la norma euclídea usual $\|\ \|$. Más aún:

Teorema

En $(\ell_2, |\ |)$ se satisfacen las propiedades $\mathcal{P}_0$ hasta $\mathcal{P}_6$. Además,

$$\|u\| \leq |u| \leq B_0\|u\|$$

para cada $u \in \ell_2$ (y por otra parte, este espacio tiene la FPP).


D
Thank you for coming!

- Browder, F.E., “Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **53** (1965), 1272–1276.
- Browder, F.E., “Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.
- Domínguez Benavides, T., “A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results”, Houston J. Math. **22** (1996), no. 4, 835–849.
- Domínguez Benavides, T., “Geometric properties of Banach spaces and metric fixed point theory”, IV Course on Banach Spaces and Operators (Spanish) (Laredo, 2001), Extracta Math. **17** (2002), no. 3, 331–349.
- Domínguez Benavides, T., “A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property”, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), no. 2, 525–530.

- Dalby, T., "The property WORTH* and the weak fixed point property", J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), no. 5, 919–927.
- Elton, J.; Lin, P.K.; Odell, E.; Szarek, S., "Remarks on the fixed point problem for nonexpansive maps. Fixed points and nonexpansive mappings", Contemp. Math., **18** (1983), 87–120 (Amer. Math. Soc.).
- Fetter, H.; Gamboa de Buen, B., "Properties WORTH and WORTH*, $(1 + d)$ embeddings in Banach spaces with 1-unconditional basis and wFPP", Fixed Point Theory Appl. (2010), Art. ID 342691, 7 pp.
- Goebel, K., "On the structure of minimal invariant sets for nonexpansive mappings" (Russian, Polish summary), Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **29** (1975), 73–77 (1977).
- Göhde, D., "Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung" (German), Math. Nachr. **30** (1965), 251–258.

- Karlovitz, L.A., “Some fixed point results for nonexpansive mappings” in Fixed point theory and its applications (Proc. Sem., Dalhousie Univ., Halifax, N.S., pp. 91–103 (Academic Press, New York, 1976).
- Khamsi, M. A., “La propriété du point fixe dans les espaces de Banach avec base inconditionnelle” (French), Math. Ann. **277** (1987), no. 4, 727–734.
- Kirk, W.A., “A fixed point theorem for mappings which do not increase distances”, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.
- Jiménez-Melado, A.; Llorens-Fuster, E., “Opial modulus and stability of the fixed point property”, Nonlinear Anal. **39** (2000), no. 3, 341–349.
- Jiménez-Melado, A.; Llorens-Fuster, E., “A class of renormings of ℓ_2 with the fixed point property”, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), no. 2, 351–362.

- LIN, P.K., "Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings", Pacific J. Math. **116** (1985), no. 1, 69–76.
- LIN, P.K., "Stability of the fixed point property of Hilbert spaces", Proc. AMS **127** (1999), no. 12, 3573–3581.
- LIN, P.K., "There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property", Nonlinear Anal. **68** (2008), no. 8, 2303–2308.
- MAZCUÑÁN-NAVARRO, E.M., "Stability of the fixed point property in Hilbert spaces", Proc. AMS **134** (2006), no. 1, 129–138.
- MAUREY, B., "Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L_1" (French) [Fixed points of the contractions of certain weakly compact subsets of L_1], Seminar on Functional Analysis, 1980–1981, Exp. No. VIII, 19 pp., École Polytech., Palaiseau, 1981.
- SIMS, B., "Banach space geometry and the fixed point property" in Recent Advances on Metric Fixed Point Theory (Seville, 1995), 137–160, Ciencias, 48 (Univ. Sevilla, 1996).