Algunas cuestiones relacionadas con órbitas de operadores

María del Pilar Romero de la Rosa

Universidad de Cádiz

September 2, 2018

Definición

Un operador T definido en un espacio de Banach X se dice que es hipercíclico si existe $x \in X$ (que se llamará vector hipercíclico para T) tal que la órbita $\{T^n x\}_{n \geq 0}$ es denso en X.

Teorema (Criterio de Hiperciclicidad)

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ y supongamos que existen

- (a1) *Un subconjunto denso $X \subset \mathcal{B}$ tal que $\|T^n x\| \to 0$ para cada $x \in X$.*
- (a2) *Un subconjunto denso $Y \subset \mathcal{B}$ y una aplicación $S : Y \to Y$ tal que $TS =$ identidad sobre Y y $\|S^n y\| \to 0$ para cada $y \in Y$.*

Entonces T es hipercíclico.

Teorema (Ansari)

Si x es hipercíclico para T, también lo es para T^N.

Cuestión.

Supongamos que $x \in X$ es hipercíclico para T y que $\{n_k\}$ es una sucesión que tiene cierta densidad en $\mathbb{N}$. ¿Es cierto que $\{T^{n_k}x\}$ permanece densa en X?

Teorema (Salas)

Dado x hipercíclico para T existe $\{n_k\}$ tal que $n_{k+1} - n_k \leq 2$ tal que $\{T^{n_k}x\}$ no es densa.

Teorema (Read, Manuel de la Rosa, Griveaux, Bayart)

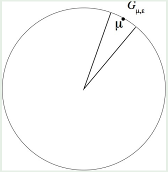
Existe un operador hipercíclico T y existe $\{n_k\}$ tal que $n_{k+1} - n_k \leq 2$ tal que $\{T^{n_k}y\}$ no es densa para ningún vector y.

Cuestión.

Supongamos que $x \in X$ es hipercíclico para T y que $\{n_k\}$ es una sucesión que tiene cierta densidad en $\mathbb{N}$ y cierta regularidad. ¿Es cierto que $\{T^{n_k}x\}$ permanece densa en X?

Cuestión 1

$\alpha = e^{2\pi i\theta}$ con θ irracional.



$\{n_k \,:\, \alpha^{n_k} \in G_{\mu,\varepsilon}\}$, ¿Es denso $\{T^{n_k}x\}$?

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico si existe un vector x tal que $\{\lambda A^n x \ : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico si existe un vector x tal que $\{\lambda A^n x \ : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico positivo si existe un vector x tal que $\{rA^n x \ : r \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico si existe un vector x tal que $\{\lambda A^n x \;: \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico positivo si existe un vector x tal que $\{rA^n x \;: r \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Teorema (León-Müller)

Si A es un operador supercíclico tal que $\sigma_p(A^\star) = \emptyset$ entonces A es supercíclico positivo

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico si existe un vector x tal que $\{\lambda A^n x \ : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Definición

Se dice que un operador A es supercíclico positivo si existe un vector x tal que $\{rA^n x \ : r \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

Teorema (León-Müller)

Si A es un operador supercíclico tal que $\sigma_p(A^\star) = \emptyset$ entonces A es supercíclico positivo

Cuestión

¿Qué ocurre cuando $\sigma_p(A^\star) \neq \emptyset$?. En este caso $\sigma_p(A^\star) = \{r_0\alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{T}$.

Cuestión 2

¿Qué ocurre cuando $A = T \oplus r_0 \alpha I_{\mathbb{C}}$?.
Si $\alpha \in \mathbb{T}$ es una raiz de la unidad, entonces la respuesta es negativa. Pero ¿Y si α es una rotación irracional?

Teorema

Las cuestiones 1 *y* 2 *son equivalentes.*

Teorema (González-León-Montes)

$A = T \oplus \alpha I_{\mathbb{C}}$ es supercíclico si y sólo si T es hipercíclico.

Definición

Dado $A = T \oplus \alpha I_{\mathbb{C}}$. Se dice que $\alpha \in \mathcal{P}$ es una dirección positiva si $A = T \oplus \alpha I_{\mathbb{C}}$ es positivo supercíclico.

Teorema

Si T satisface el criterio de hiperciclicidad entonces $\mathcal{P}$ es exáctamente el conjunto de las rotaciones irracionales.

Teorema

Si T es hipercíclico, entonces $\mathcal{P}$ es un conjunto G_δ denso del $\mathbb{T}$.

Definición (2013-Rezaei)

Un operador T se dice que es convexo-cíclico, si existe $x \in X$ tal que el conjunto $\{p(T)x \ : \ p(z)\,, \text{polinomio convexo}\}$ es denso en X. Siendo $p(z) = t_0 + t_1 z + \cdots t_n z^n$, $t_0 + \cdots + t_n = 1$, $t_i \in \mathbb{R}$.

Cuestiones (Rezaei 2013)

1. Si T es convexo-cíclico. ¿es T^N convexo-cíclico?
2. Si T es convexo-cíclico y $\mu \in \mathbb{T}$, ¿es μT convexo-cíclico?
3. Si la órbita convexo-cíclica es densa en alguna parte, ¿es T convexo-cíclico?
4. Si T es convexo cíclico, ¿Es T débil hipercíclico?

Teorema

Ninguna de las 4 preguntas plantadas por Rezaei es cierta.

Contraejemplos

Consideramos B el operador desplazamiento hacia la derecha. (Rolewicz) μB es hipercíclico si $|\mu| > 1$. Los contraejemplos son de la forma $\mu B \oplus \alpha I_{\mathbb{C}}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definición (Álgebra fuertemente compacta)

Un álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ se dice que es fuertemente compacta, si su bola unidad es un conjunto relativamente compacto en la topología fuerte de operadores.

Definición (Álgebra fuertemente compacta)

Un álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ se dice que es fuertemente compacta, si su bola unidad es un conjunto relativamente compacto en la topología fuerte de operadores.

Definición (Operador fuertemente compacto)

T se dice que es fuertemente compacto, si el álgebra generada por T y la identidad, es fuertemente compacta.

Definición (Álgebra fuertemente compacta)

Un álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ se dice que es fuertemente compacta, si su bola unidad es un conjunto relativamente compacto en la topología fuerte de operadores.

Definición (Operador fuertemente compacto)

T se dice que es fuertemente compacto, si el álgebra generada por T y la identidad, es fuertemente compacta.

Lomonosov (1980)

Si un operador T es esencialmente normal, satisface que conmutante de T y de $T^\star$ no son álgebras fuertemente compactas, entonces T posee un subespacio invariante no trivial. Si además T y $T^\star$ no son fuertemente compactos, entonces T posee un subespacio hiperinvariante no trivial.

Marsalli (1990)

Michael Marsalli. A classification of operator algebras. J. Operator Theory, 24(1):155–163, 1990.

Lacruz-Lomonosov-Rodríguez (2006)

Miguel Lacruz, Victor Lomonosov, and Luis Rodríguez-Piazza. Strongly compact algebras. RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat., 100(1-2):191–207, 2006.

Operadores fuertemente compactos

1. Operadores normales fuertementente compactos (Lacruz-Piazza, 2009).
2. Operadores de composición fuertemente compactos (Lacruz-Fernandez, 2011); (Joel Shapiro, 2012)...
3. $\ldots$

Lacruz, Fernández-Valles (2011), Marsalli (1990)

Si los autovectores de un operador forman un conjunto total, entonces el operador es fuertemente compacto. Si además para cada autovalor λ la dimensión de $\mathrm{Ker}(T-\lambda)$ es finita, entonces el conmutante de T es fuertemente compacto.

Cuestión

- ¿Existe alguna condición espectral de tipo local, que permita garantizar que un operador es fuertemente compacto?
- ¿Es posible obtener nuevos ejemplos de operadores fuertemente compactos no conocidos?

Teorema

Sea T un operador en un espacio de Banach complejo X tal que $0 \in \eta(\sigma(T))$ y supongamos que existe un conjunto total $S \subset X$ con la propiedad de que $r(x, T) < d(0, \partial(\eta(\sigma(T)))$ para cada $x \in S$. Entonces el operador T es fuertemente compacto.

Radio espectral operador desplazamiento bilátero

Si W es un operador desplazamiento bilátero con pesos se tiene que el radio espectral $r(W) = \max\{r^-(W), r^+(W)\}$. donde

$$r^-(W) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>0} |w_{-n-k} \cdots w_{-k+1}|^{1/n}$$

y

$$r^+(W) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq 0} |w_k \cdots w_{n+k-1}|^{1/n},$$

Módulo mínimo

Cambiando supremo por ínfimo en las ecuaciones anteriores, se obtienen las cantidades $r_1^-(W)$ y $r_1^+(W)$, relacionadas con el módulo mínimo por $r_1(W) = \min\{r_1^-(W), r_1^+(W)\}$.

Cantidades relacionadas con autovalores. Si $r_3^+(W) < r_2^-(W)$ entonces existe espectro puntual y sus autovectores

$$r_2^-(W) = \liminf_{n\to\infty} |w_{-1}\cdots w_{-n}|^{1/n}, \;\; r_2^+(W) = \liminf_{n\to\infty} |w_0\cdots w_{n-1}|^{1/n}$$

$$r_3^-(W) = \limsup_{n\to\infty} |w_{-1}\cdots w_{-n}|^{1/n}, \;\; r_3^+(W) = \limsup_{n\to\infty} |w_0\cdots w_{n-1}|^{1/n}.$$

Si $r_3^+(W) < r_2^-(W)$ entonces existe espectro puntual y sus autovectores forman un conjunto total. El conmutante es fuertemente compacto.

Cuestión

¿Qué ocurre en ausencia de autovalores, $r_2^-(W) \leq r_3^+(W)$?

Teorema

Si $r_3^+(W) < r(W)$ entonces W es fuertemente compacto.

Ejemplo

Existe W fuertemente compactos tal que W^{-1} no es fuertemente compacto.

Teorema

Si W y W^{-1} son ambos fuertemente compactos, entonces el álgebra generada por W y por W^{-1} es fuertemente compacta.

Definición

Un vector $x \in X$ es cíclico para T si $\{p(T)x \ : \ p \text{ polinomio}\}$ es denso en X.
Denotemos por $C_0(T)$ vectores cíclicos de T unión $\{0\}$.

Herrero (1979)

$C_0(T)$ contiene un conjunto denso de vectores si y sólo si $\sigma_p(T^\star)$ tiene interior vacío.

Cuestiones

1. ¿Cuándo contiene $C_0(T)$ un subespacio denso e invariante? (estudiado por Bourdon y Herrero para vectores hipercíclicos)
2. ¿Cuándo contiene $C_0(T)$ un subespacio cerrado infinito dimensional ? (estudiado por González-León-Montes para vectores hipercíclicos).

Herrero (91)-Bourdon (93)

$C_0(T)$ un subespacio denso e invariante si y sólo si $\sigma_p(T^\star) = \emptyset$.

Teorema

Si $T \oplus T$ es cíclico entonces $C_0(T)$ contiene un subespacio cerrado infinito dimensional si y sólo si $\sigma_p(T^\star) = \emptyset$.

Ejemplos

Los siguientes operadores T no satisfacen la condición $T \oplus T$ cíclico y sin embargo $C_0(T)$ contiene un subespacio cerrado infinito dimensional:

1. El operador de Volterra definido $L_p(0,1)$ $(1 \leq p < \infty)$
2. El operador de multiplicación M_x definiodo en $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$.
3. U_p el operador desplazamiento bilátero sin pesos definido en $\ell_p(\mathbb{Z})$.
4. El operador de Cesàro C_∞ on $L_2(0,\infty)$.

Godefroy-Shapiro (1991)

Si T definido en $H(\mathbb{C})$ conmuta con el operador diferenciación y no es un múltiplo de la identidad entonces T es hipercíclico.

Aron-Markose

Introducen los operadores $T_{\lambda,b}f = f'(\lambda z + b)$, $\lambda, b \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq 1$ entonces $T_{\lambda,b}$ no conmuta con el operador derivada.

Aron-Markose, G. Fernández-A. Hallack

Si $|\lambda| > 1$ entonces $T_{\lambda,b}$ es hipercíclico.

Cuestión

¿Es posible caracterizar cuando $T_{\lambda,b}$ es hipercíclico en términos de b y λ?

Teorema

Sea $\lambda \neq 1$. *Entonces* $T_{\lambda,b}$ *es hipercíclico si y sólo si* $|\lambda| \geq 1$.

Cuestión

¿Es posible caracterizar cuando $T_{\lambda,b}$ cuando posee un subespacio cerrado de dimensión infiinita de vectores hipercíclicos?

Teorema

Sea $\lambda \neq 1$. *Entonces* $T_{\lambda,b}$ *es posee un subespacio cerrado de dimensión infinita de vectores hipercíclicos si y sólo si* $|\lambda| = 1$.

Cuestión

¿Cómo es el crecimiento de las funciones hipercíclicas para $T_{\lambda,b}$?

Teorema $(|\lambda| = 1, \lambda \neq 1)$

Si $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *con* $\varphi(r) \to +\infty$ *cuando* $r \to \infty$, *entonces existe* f *hipercíclico para* $T_{\lambda,b}$, *tal que*

$$|f(z)| = O\left(\varphi(r)\frac{e^r}{\sqrt{r}}\right) \qquad \text{cuando} \quad |z| = r \to \infty..$$

Teorema $(|\lambda| = 1, \lambda \neq 1)$

No existen funciones enteras hipercíclicas para $T_{\lambda,b}$ *satisfaciendo*

$$|f(z)| = O\left(\frac{e^r}{\sqrt{r}}\right) \qquad |z| = r.$$

1. María del Pilar Romero de la Rosa. Regular orbits and positive directions. Positivity, 13(4):631–642, 2009.

2. Miguel Lacruz and Maria del Pilar Romero de la Rosa. A local spectral condition for strong compactness with some applications to bilateral weighted shifts. Proc. Amer. Math. Soc., 142(1):243– 249, 2014.

3. Fernando León-Saavedra and Maria del Pilar Romero-de la Rosa. Powers of convex-cyclic operators. Abstr. Appl. Anal., pages Art. ID 631894, 3, 2014.

4. Fernando León-Saavedra and Pilar Romero-de la Rosa. Fixed points and orbits of non-convolution operators. Fixed Point Theory Appl., pages 2014:221, 5, 2014.

5. Manuel González, Fernando León-Saavedra, and María; del Pilar Romero de la Rosa. Operators admitting a closed subspace of cyclic vectors. Integral Equations Operator Theory, 2018. https://doi.org/10.1007/s00020-018-2458-2

6. Fernando León-Saavedra and Pilar Romero-de la Rosa. Rate growth of hypercyclic entire functions for non-convolution operators. (En preparación)