1. Introducción

Pringsheim en 1900 comenzó el estudio de la convergencia clásica de las sucesiones dobles, y notó que, para converger, no necesitan estar acotadas. Este hecho motivó que muchos matemáticos se interesaran por ellas. Como consecuencia, muchos conceptos de las sucesiones ordinarias se aplicaron a las dobles.

Uno de ellos fue hecho por Mursaleen y Edley en 2003, al extender los conceptos de densidad y convergencia estadística a ellas.

Patterson y Savas definieron la convergencia estadística para dobles con la ayuda de sucesiones lagunares, y obtuvieron interesantes relaciones entre convergencia lagunar estadística y convergencia estadística.

Además, Tripathy y Tripathy extendieron los conceptos de τ.convergencia y $\mathfrak{I}$-Cauchy de las ordinarias a las dobles, estudiaron algunas de sus propiedades: solidez, simetricidad, completitud, densidad, etc.

Kumar prosiguió esta última idea e introdujo la convergencia $\mathfrak{I}^*$ para dobles, y obtuvo algunas relaciones entre la convergecia tau con asterisco y sin él.

Mursaleen y otros introdujeron en 2010 la convergencia λ-estadística para dobles.

En 2012, Belen y Yilldirim definieron la convergencia $\mathfrak{I}_2$ estadística para dobles, y obtuvieron algunas relaciones de inclusión.

2. Convergencia de una sucesión doble

La definición clásica de la convergencia de una sucesión doble de números reales es la siguiente:

Definición 1 *Decimos que L es el límite de una sucesión doble $\{x(i,j)\}$ de números reales si para todo $\varepsilon > 0$ existen dos enteros positivos i_0 y j_0 tales que, si $i \geq i_0$ y $j \geq j_0$, se tiene:*

$$|x(i,j) - L| < \varepsilon.$$

Es claro que tomando el mayor de i_0 y j_0 se reduce las dos condiciones anteriores a una sola.

Veamos un ejemplo.Sea la sucesión doble definida así:

$$x_{ij} = \begin{cases} j, & \text{si } i = 1; \\ i, & \text{si } j = 1; \\ 0, & \text{si } i \neq 1 \text{ y } j \neq 1. \end{cases}$$

Para $i \geq 2$ y $j \geq 2$ tenemos: $|x(i,j)| < \varepsilon$, por tanto, el límite es cero.

Este ejemplo muestra claramente que *para ser convergente no es necesario estar acotada*, como ocurre con las sucesiones ordinarias.

Nótese que los elementos de índices $(1, j)$ y $(i, 1)$ no cumplen la condición de convergencia, y son, en número, infinitos; pero sólo la incumplen una fila y una columna.

3. Convergencia Cesàro

Una sucesión doble $\{x(i,j)\}$ tiene límite Cesàro L si se verifica:

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \Sigma_{i=1,j=1}^{m,n} x(i,j) = L.$$

El ejemplo anterior muestra que una sucesión doble puede ser convergente y no serlo Cesàro, pues su límite es:

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{m^2 + m + n^2 + n - 2}{2mn},$$

el cual *no existe*, pues si $m = rn$ el límite vale $\frac{r}{2}$.

Pero la convergencia más interesante para sucesiones dobles es la estadística, por ser el primer ejemplo de un ideal en $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Para ello debemos exponer el concepto de densidad en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ introducido por Mursaleen y Edley en 2003.

4. Densidad de un subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Sea $J\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, y sea $J(m,n)$ el cardinal de los pares ordenados (i,j) de J, siendo $i\leq m$ y $j\leq n$. Entonces la densidad bidimensional, análoga de la clásica, se define como sigue:

Definición 2 *Llamamos densidad asintótica inferior de $J\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a:*

$$\delta_2(J)=\liminf_{m,n}\frac{J(m,n)}{mn}.$$

En el caso de que la sucesión $\frac{J(m,n)}{mn}$ tenga límite doble ordinario, entonces decimos que J tiene densidad natural, definida como:

$$\delta_2(J)=\lim_{m,n\to\infty}\frac{J(m,n)}{mn}.$$

Por ejemplo, sea $J=\{(i^2,j^2):i,j\in\mathbb{N}\}$. Entonces:

$$\delta_2(J)=\lim_{m,n\to\infty}\frac{J(m,n)}{mn}\leq\frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn}=0,$$

lo que expresa que densidad natural doble es cero, mientras que el conjunto $\{(i,2j)\}$ tiene densidad natural doble $\frac{1}{2}$.

La densidad doble es la base de la convergencia estadística.

5. Convergencia estadística de una sucesión doble

Definición 3 *Una sucesión doble $x=\{x_{ij}\}$ de números se dice estadísticamente convergente a un L si para todo $\varepsilon>0$:*

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}|\,\{i\leq m,j\leq n:|x_{ij}-L|\geq\varepsilon\}\,|=0.$$

En este caso, escribiremos: E_2— $\lim_{i,j\to\infty}x_{ij}=L$.

Como se ve, por la definición, el conjunto de los elementos de la sucesión que difieren del límite, en valor absoluto, más o igual que ε tiene densidad nula.

La esencia de esta definición, y lo más importante de esta modesta exposición es el hecho de que los conjuntos de densidad nula forman *un ideal* de $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$; y sus complementarios de densidad 1 son *un filtro.*

Repasemos ambos conceptos:

Definición 4 *Sea X un conjunto no vacío. Llamamos ideal $\mathfrak{I}$ a una familia de partes de X que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ está en $\mathfrak{I}$*
2. *Si A y B están en $\mathfrak{I}$, también está $A \cup B$.*
3. *Si $B \subseteq A$, y A está en $\mathfrak{I}$, también B está en $\mathfrak{I}$.*

Definición 5 *Sea X un conjunto no vacío. Llamamos filtro $\mathfrak{F}$ a una familia de partes de X que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ no está en $\mathfrak{F}$*
2. *Si A y B están en $\mathfrak{F}$, también está $A \cap B$.*
3. *Si $B \supseteq A$, y A está en $\mathfrak{F}$, también B está en $\mathfrak{F}$.*

Si $\mathfrak{I}$ es un ideal en X, su filtro adjunto $\mathfrak{F}$ está formado por las partes de X que son complementarios de las de $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{F} = \{X \setminus A : A \in \mathfrak{I}\}.$$

Veamos que los conjuntos de densidad doble nula son un ideal. En efecto:

1) $\delta_2(\emptyset) = 0$.

2) Al ser: $0 \leq \delta_2(A \cup B) \leq \delta_2(A) + \delta_2(B)$ si $\delta_2(A) = 0$ y $\delta_2(B) = 0$, resulta: $\delta_2(A \cup B) = 0$.

3) Si $B \subseteq A$ y $\delta_2(A) = 0$, por ser: $0 \leq \delta_2(B) \leq \delta_2(A)$, resulta: $\delta_2(B) = 0$.

Este resultado es la base de la siguiente generalización:

Definición 6 *Sea $\mathfrak{I} \subset P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ un ideal no trivial, y sea $\{x(i,j)\}$ una sucesión doble. Diremos que la sucesión es $\mathfrak{I}$-convergente a L si para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $A(\varepsilon) = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x(i,j) - L| \geq \varepsilon\}$ está en $\mathfrak{I}$; y escribiremos: $\mathfrak{I}\text{—} \lim\limits_{i,j \to \infty} x_{i,j} = L$.*

Un par de teoremas sencillos son los siguientes:

Teorema 1 *Una sucesión doble $\{x(i,j)\}$ sólo puede tener un límite respecto de un ideal $\mathfrak{I}$ no trivial.*

Demostración: Supongamos que la sucesión $\{x(i,j)\}$ tenga dos límites L' y L, respecto del ideal no trivial $\mathfrak{I}$, siendo $L' > L$; sea $L' - L = \delta$.

Por la definición existen dos conjuntos $A, B \in \mathfrak{I}$, tales que:

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ |x(i,j) - L| \geq \frac{\delta}{2}\} \qquad B = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ |x(i,j) - L'| \geq \frac{\delta}{2}\}.$$

En el conjunto $A^c \cap B^c$ que pertenece al filtro adjunto y es el complementario de $A \cup B$ se tiene:

$$A^c \cap B^c = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ |x(i,j) - L'| < \frac{\delta}{2} \text{ y } |x(i,j) - L| < \frac{\delta}{2}\}.$$

Pero entonces:

$$|x(i,j) - L'| = |x(i,j) - L - \delta| = |\delta - x(i,j) + L| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

lo cual es una contradicción.

Si una sucesión doble es convergente, todo ideal que contenga a los infinitos elementos excluidos de la condición de convergencia, para cada ε, la hace también convergente.

Teorema 2 *El conjunto de la sucesiones dobles convergentes respecto de un ideal no trivial $\mathfrak{I}$ es un espacio vectorial.*

Demostración:

6. Aplicación a las sucesiones ordinarias

Definición 7 *Sea $\mathfrak{I} \subset P(\mathbb{N})$ un ideal no trivial de $\mathbb{N}$, y sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $x = \{x_n\}$ en X es $\mathfrak{I}$-convergente a L si para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, L) \geq \varepsilon\}$ está en $\mathfrak{I}$; y escribiremos: $\mathfrak{I}\text{—}\lim_{n\to\infty} x_n = L$.*

Como la convergencia usual de sucesiones ordinarias excluyen sólo un conjunto finito de elementos, tiene importancia la siguiente definición:

Definición 8 *Un ideal se dice admisible si contiene a los átomos; es decir, a los conjuntos formados por sólo un elemento.*

Si un ideal es admisible, contiene a los conjuntos finitos. En consecuencia: *Toda sucesión convergente en el sentido ordinario lo es también respecto de un ideal admisible.*

En las sucesiones simples convergentes, en sentido ordinario, el ideal suyo es el de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Definición 9 *Un ideal propio $\mathfrak{I} \subset P(\mathbb{N})$ se dice que satisface la condición (AP) si para toda familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos: $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ existe una familia numerable $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ en $\mathfrak{I}$ tales que $A_i \triangle B_i$ es un conjunto finito para todo $i \in \mathbb{N}$ y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{I}$.*

TESIS DOCTORAL DE SUDHIR KUMAR, UNIVERSIDAD DE THAPAR, PATIALA, PUNJAB, INDIA (DICIEMBRE 2017)