I Workshop on Functional Analysis.
Jerez de la Frontera.

Medidas en álgebras efecto.

Soledad Moreno Pulido

Contenido

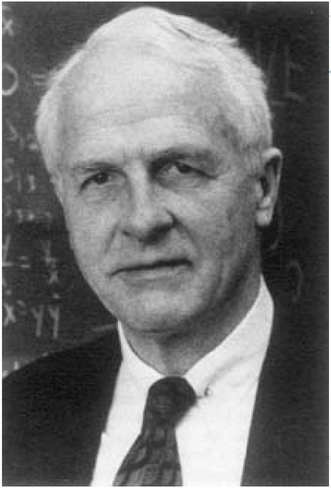

Figura: Garret Birkhoff
(1911 – 1996)

Figura: John von Neumann
(1903 – 1957)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

1. **Introduction.** One of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes. It asserts that even a complete mathematical description of a physical system $\mathfrak{S}$ does not in general enable one to predict with certainty the result of an experiment on $\mathfrak{S}$, and that in particular one can never predict with certainty both the position and the momentum of $\mathfrak{S}$ (Heisenberg's Uncertainty Principle). It further asserts that most pairs of observations are incompatible, and cannot be made on $\mathfrak{S}$ simultaneously (Principle of Non-commutativity of Observations).

The object of the present paper is to discover what logical structure one may hope to find in physical theories which, like quantum mechanics, do not conform to classical logic. Our main conclusion, based on admittedly heuristic arguments, is that one can reasonably expect to find a calculus of propositions which is formally indistinguishable from the calculus of linear subspaces with respect to *set products*, *linear sums*, and *orthogonal complements*—and resembles the usual calculus of propositions with respect to *and*, *or*, and *not*.

In order to avoid being committed to quantum theory in its present form, we have first (in §§2–6) stated the heuristic arguments which suggest that such a calculus is the proper one in quantum mechanics, and then (in §§7–14) reconstructed this calculus from the axiomatic standpoint. In both parts an attempt has been made to clarify the discussion by continual comparison with classical mechanics and its propositional calculi. The paper ends with a few tentative conclusions which may be drawn from the material just summarized.

I. PHYSICAL BACKGROUND

2. **Observations on physical systems.** The concept of a physically observable "physical system" is present in all branches of physics, and we shall assume it.

It is clear that an "observation" of a physical system $\mathfrak{S}$ can be described generally as a writing down of the readings from various[1] compatible measurements. Thus if the measurements are denoted by the symbols $\mu_1, \cdots, \mu_n$, then

[1] If one prefers, one may regard a set of compatible measurements as a single composite "measurement"—and also admit non-numerical readings—without interfering with subsequent arguments.

Among conspicuous observables in quantum theory are position, momentum, energy, and (non-numerical) symmetry.

823

- 1936. Lógica cuántica.
- Algunas proposiciones de la mecánica cuántica no pueden explicarse con la lógica proposicional clásica.
- **Nuevas reglas** para explicar anomalías sobre las mediciones cuánticas.
- Una de las diferencias más notables es que **la propiedad distributiva no se verifica**.
- Para modelizar las **mediciones imprecisas** $\Rightarrow$ **Álgebras efecto** (1994).

Álgebra efecto. Foulis y Bennet (1994)

Un **álgebra efecto** es una estructura $(L, \oplus, 0, 1)$ dotada de dos elementos especiales $0, 1 \in L$ y una operación binaria parcialmente definida $\oplus$ que satisface, para todo $p, q, r \in L$:

(E1) ***(Conmutativa)*** Si $p \oplus q$ está definido, entonces $q \oplus p$ está definido y

$$p \oplus q = q \oplus p.$$

(E2) ***(Asociativa)*** Si $q \oplus r$ está definido y $p \oplus (q \oplus r)$ está definido, entonces $p \oplus q$ está definido, $(p \oplus q) \oplus r$ está definido y

$$(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r).$$

(E3) ***(Ortocomplemento)*** Para cada $p \in L$, existe un único $q \in L$ tal que $p \oplus q$ está definido y $p \oplus q = 1$.

(E4) ***(Ley Cero-Uno)*** Si $1 \oplus p$ está definido, entonces $p = 0$.

Álgebras de Boole

Toda álgebra de Boole es álgebra efecto.

Definiendo $p \oplus q = p \cup q \Leftrightarrow p \cap q = 0$, es fácil comprobar que tenemos todas las propiedades de álgebra efecto.

■

- En mecánica cuántica, un sistema físico $\mathcal{S}$ se representa mediante un espacio de **Hilbert complejo y separable** $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.
- Un **efecto** del sistema $\mathcal{S}$ es un operador autoadjunto A definido en $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ tal que $\mathbb{O} \leq A \leq \mathbb{1}$.

- Un **operador** es una aplicación lineal y continua definida en $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.
- **Operador cero:** $\mathbb{O} : \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, tal que $\mathbb{O}(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.
- **Operador identidad:** $\mathbb{1} : \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, tal que $\mathbb{1}(x) = x$, para todo $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.
- A es un operador **autoadjunto** si $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
- A es **positivo** si $\langle A(x), x\rangle \geq 0$ para cada $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.
- Si A y B son operadores autoadjuntos, $\boldsymbol{A \leq B}$ si $B - A$ es positivo.

Álgebra efecto estándar

$(L, \oplus, \mathbb{O}, \mathbb{1})$, donde

$L = \{A : \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{S}} /\ A$ es un operador autoadjunto tal que $\mathbb{O} \leq A \leq \mathbb{1}\}$

y la operación

$$A \oplus B = A + B \Leftrightarrow A + B \leq \mathbb{1}.$$

es un álgebra efecto.

- Los efectos representan mediciones u observaciones imprecisas en el sistema $\mathcal{S}$.
- Las medidas valoradas en los efectos tienen un importante rol en la mecánica cuántica estocástica.

Álgebra efecto de conjuntos

Sean X un conjunto y $L \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que L es un **álgebra efecto de conjuntos** si L satisface las siguientes condiciones:

(1) $\varnothing \in L$.

(2) Si $a, b \in L$ y $a \cap b = \varnothing$, entonces $a \cup b \in L$.

(3) Si $a \in L$, entonces $a^c \in L$.

Dado un conjunto X, la familia

$$\phi(X) = \{a \subseteq X : a \text{ es finito o cofinito}\}$$

es álgebra efecto de conjuntos.

Álgebras efecto naturales

- Se dice que $\mathcal{F}$ es **familia natural** si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\phi_0(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ ($\phi_0(X)$ familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$).
- Se dice que $\mathcal{F}$ es **álgebra efecto natural** si es familia natural con estructura de álgebra efecto de conjuntos.

Sea L álgebra efecto de conjuntos. Sean $a, b \in L$. Entonces,

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Sea L álgebra efecto y $p, q \in L$.

1. Diremos que p es **ortogonal a** q ($p \perp q$), si $p \oplus q$ está definido.
2. Sea $F = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ subconjunto finito de L.
   Si $a_1 \oplus a_2$, $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3, \ldots, a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n$ están definidos, decimos que
   F es **conjunto ortogonal finito** y definimos
   $\boxed{\oplus F = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n.}$
3. Un subconjunto $G \subset L$ es **ortogonal** si cada subconjunto finito de G es ortogonal y $\boxed{\oplus G = \sup\{\oplus F : F \subseteq G, F \text{ finito}\}}$ si dicho supremo existe.
4. Diremos que $\boldsymbol{p \leq q}$ si existe $r \in L$ tal que $p \perp r$ y $p \oplus r = q$.

Sea $(L, \oplus, 0, 1)$ un álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu : L \to X$.

1. μ es **medida (finitamente aditiva)** si para cada $a, b \in L$ ortogonales, $\mu(a \oplus b) = \mu(a) + \mu(b)$.
2. μ es **medida** $\sigma-$**aditiva** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal tal que existe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} a_n$, se tiene que $\mu\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n)$.
3. μ es **medida acotada** si $\sup\{\|\mu(a)\| : a \in L\} < +\infty$.

Ejemplo de medida acotada no $\sigma-$aditiva

Sea $L = \phi(\mathbb{N})$, (subconjuntos finitos y cofinitos de $\mathbb{N}$).

$$\mu(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \text{ es finito;} \\ 1, & \text{si } a \text{ es cofinito.} \end{cases}$$

- μ es **medida**.
- **No es $\sigma-$aditiva**, ya que $1 = \mu(\mathbb{N}) \neq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\{i\}) = 0$.
- μ es **acotada**, ya que $\sup\{|\mu(a)| : a \in L\} = 1 < +\infty$.

Sea $(L, \oplus, 0, 1)$ un álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu : L \to X$.

1. μ es **medida exhaustiva o fuertemente acotada** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\lim \mu(a_n) = 0$.
2. μ es **medida fuertemente aditiva** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n)$ converge en norma.
3. μ es **medida absolutamente aditiva** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\mu(a_n)\| < +\infty$.

Caracterización

Sea L un álgebra efecto, G un grupo topológico completo Hausdorff y $\mu : L \to G$ una medida.

1. μ es fuertemente aditiva si y sólo si es exhaustiva.
2. Si $G = \mathbb{R}$, μ es absolutamente aditiva si y sólo si μ es fuertemente aditiva. Además, si μ es acotada, entonces μ es exhaustiva.

Medidas sobre álgebras efecto

Una medida no acotada pero sumable en cada sucesión ortogonal

Existen $(B_n)_n$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que:

- $B_i \cap B_j \notin \phi(\mathbb{N})$.
- $B_i \cap B_j^c \notin \phi(\mathbb{N})$, si $i \neq j$.
- $B_i^c \cap B_j^c \notin \phi(\mathbb{N})$.

Sean $\boxed{L = \{\varnothing\} \cup \{\mathbb{N}\} \cup \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B_n^c : n \in \mathbb{N}\}}$ y $\mu : L \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mu(B_n) = n \qquad \mu(B_n^c) = -n$$
$$\mu(\varnothing) = 0 \qquad \mu(\mathbb{N}) = 0$$

- $(L, \cup, \varnothing, \mathbb{N})$ es **álgebra efecto de conjuntos**, con $\boxed{a \cup b \in L \Leftrightarrow a \cap b = \varnothing}$.
- μ es **absolutamente aditiva:** Por construcción de los B_n, las sucesiones ortogonales $(E_n)_n$ de L son triviales, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $E_n = \varnothing$ para todo $n \geqslant n_0$, y por tanto, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| < +\infty}$.
- μ **no es acotada**, ya que $\boxed{\mu(B_n) = n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}}$.

Sea $(L, \oplus, 0, 1)$ un álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu_i : L \to X$, $i \in \mathbb{N}$ medida.

1. $(\mu_i)_i$ es **puntualmente convergente** si existe el límite $\lim\limits_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(a)$ para todo $a \in L$.
2. $(\mu_i)_i$ es **puntualmente acotada** si para cada $a \in L$ existe $\alpha_a > 0$ tal que $\|\mu_i(a)\| < \alpha_a$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
3. $(\mu_i)_i$ es **uniformemente acotada** si existe $\alpha > 0$ tal que $\|\mu_i(a)\| < \alpha$ para todo $a \in L$ y todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $(L, \oplus, 0, 1)$ un álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu_i : L \to X$, $i \in \mathbb{N}$ medida.

1. $(\mu_i)_i$ es **uniformemente exhaustiva o fuertemente acotada** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_i(a_n) = 0$ uniformemente en $i \in \mathbb{N}$.
2. $(\mu_i)_i$ es **uniformemente fuertemente aditiva** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_i(a_k)\right)_n$ converge uniformemente en $i \in \mathbb{N}$.
3. $(\mu_i)_i$ es **uniformemente absolutamente aditiva** si para $(a_n)_n \subseteq L$ ortogonal, $\left(\sum_{k=1}^{n} \|\mu_i(a_k)\|\right)_n$ converge uniformemente en $i \in \mathbb{N}$.

Caracterización

Sea L un álgebra efecto, G un grupo topológico completo Hausdorff y $\mu_i : L \to G$, $i \in \mathbb{N}$, una medida.

1. $(\mu)_i$ es uniformemente fuertemente aditiva si y sólo si es uniformemente exhaustiva.
2. Si $G = \mathbb{R}$, si $(\mu)_i$ es uniformemente exhaustiva, entonces es uniformemente absolutamente aditiva.

Una sucesión de medidas unif. abs. aditiva no punt. acotada

Sea el álgebra de Boole $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos, para cada $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\mu_i(a) = \begin{cases} i, & \text{si } 1 \in a; \\ 0, & \text{si } 1 \notin a. \end{cases}$$

- $(\mu_i)_i$ es **uniformemente absolutamente aditiva**, ya que si $(a_k)_k$ es sucesión de elementos disjuntos dos a dos, entonces o bien $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_i(a_k)| = 0$ o bien $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_i(a_k)| = i$ uniformemente.
- **No es puntualmente acotada**, ya que para el conjunto $\{1\} \in \mathcal{A}$, $\mu_i(\{1\}) = i \to +\infty$.

Sea L un álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu : L \to X$ una medida.

1. $\pi = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una **descomposición de $e \in L$** si $e_i \in L$, con $i = 1, \ldots, n$, son ortogonales dos a dos y $e = e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$.
2. $|\mu| : L \to [0, +\infty]$ es la **variación de μ en $e \in L$** si

$$|\mu|(e) = \sup_{\pi \in \Pi} \Big\{ \sum_{e_i \in \pi} \|\mu(e_i)\| \Big\},$$

   donde el supremo se calcula sobre la familia Π de todas las descomposiciones $\pi = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de e con $e_i \in L$.
3. Si $|\mu|(1) < +\infty$, entonces se dice que μ es **de variación acotada.**

Nota

Si $\mathcal{A}$ es álgebra de Boole y $\mu : \mathcal{A} \to X$ es medida, $|\mu|$ también es medida, pero en álgebras efecto, **la subaditividad de la variación no está garantizada** (siguiente ejemplo).

Sea $L = \{\varnothing, X^+, X^-, Y^+, Y^-, \mathbb{R}^2\}$, donde

$$X^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \qquad X^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$
$$Y^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \qquad Y^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$$

y sea $\mu : L \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mu(\varnothing) = 0, \qquad \mu(\mathbb{R}^2) = 2,$$
$$\mu(X^+) = 1, \qquad \mu(X^-) = 1,$$
$$\mu(Y^+) = 5, \qquad \mu(Y^-) = -3.$$

- L es **álgebra efecto** con la operación

$$A \oplus B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing.$$

- μ es una **medida**.
- $|\mu|$ **no es subaditiva**:

$$|\mu|(X^+) = 1,$$
$$|\mu|(X^-) = 1,$$
$$|\mu|(X^+ \cup X^-) = |\mu|(\mathbb{R}^2) = 8.$$

Propiedad RDP

Sea L álgebra efecto. Se dice que L tiene la **propiedad de descomposición de Riesz** (RDP) si para todo $x \in L$ y $a, b \in L$ ortogonales tales que $x \leq a \oplus b$, existen $x_1, x_2 \in L$ tales que $x_1 \leq a$, $x_2 \leq b$ y $x = x_1 \oplus x_2$.

Ejemplo

$L = \mathbb{R}^+[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ es **álgebra efecto (RDP)**.
$(x \oplus y = x + y \Leftrightarrow x + y \leq 1)$.

Teorema

Sea L álgebra efecto, X espacio de Banach y $\mu : L \to X$ una medida finitamente aditiva. Sean $e, f \in L$ ortogonales. Entonces:

1. $|\mu|(e) + |\mu|(f) \leq |\mu|(e \oplus f)$.
2. Si L es (RDP), $|\mu|(e \oplus f) \leq |\mu|(e) + |\mu|(f)$ **(Subaditividad)**.

Corolario

(RDP)$\Rightarrow$ $|\mu|$ **es medida finitamente aditiva** (en la situación del teorema anterior).

Nota

Para demostrar la subaditividad de la variación de una medida, es necesaria alguna condición adicional sobre un álgebra efecto.

Medidas complejas

Sea L un álgebra efecto y $\mu : L \to \mathbb{C}$ una medida.

1. μ es acotada si y sólo si es de variación acotada.
2. μ es exhaustiva si y sólo si $|\mu|$ es exhaustiva.

Si G es un grupo completo normado y $\mu : L \to G$ es una medida de **variación acotada**, entonces μ es **fuertemente aditiva** (y por tanto, μ es **exhaustiva** por la caracterización).