Conmutantes de operadores de Composición

Fernando León Saavedra

Universidad de Cádiz

September 2, 2018

Lacruz, M. León-Saavedra, Petrovic, S., Rodríguez-Piazza, L.

Composition operators with a Minimal Commutant, Advances in Mathematics, **328**, 2018, 890-927.

El conmutante de un operador

Definición

El conmutante de un operador T es el subálgebra

$$\{T\}' = \{A \in \mathcal{L}(X) \ : \ TA = AT\}.$$

Definición

Dado T, se define $\mathrm{Alg}(T) = \{p(T) \ : \ p \text{ polinomio}\}$.

Definición

En general, $\overline{\mathrm{Alg}(T)}^{\sigma} \subset \{T\}'$. Se dice que un operador T posee un conmutante mínimo si $\overline{\mathrm{Alg}(T)}^{\sigma} = \{T\}'$

El operador de Cesàro en ℓ^2.

Hardy, G. H. Divergent Series. Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp. (Reviewer: R. P. Agnew) 40.0X

Un operador desplazamiento con pesos en ℓ^2.

Shields, A. L.; Wallen, L. J. The commutants of certain Hilbert space operators. Indiana Univ. Math. J. 20 1970/1971 777–788.

El operador de Volterra

D. Sarason, Generalized interpolation in H∞, $Trans.Amer.Math.Soc.$127(1967)179–203, MR0208383.

Operadores de Composición

Operador de Composición

Sea $\varphi \in H(\mathbb{D})$, tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, la fórmula $C_\varphi f = f \circ \varphi$ define un operador continuo $H(\mathbb{D})$.

El espacio de Hardy

$f \in H(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Principio de Subordinación de Littlewood (1925)

Un operador de composición C_φ es un operador acotado en $H^2(\mathbb{D})$.

Los trabajos sobre operadores de composición

Tratan de conectar las cuestiones más básicas que nos podamos plantear sobre operadores lineales, con resultados clásicos de la teoría de funciones analíticas.

El papel de las auto-transformaciones bilineales del disco unidad

$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tales que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Son una buena clase de ejemplos, más fáciles de manejar, que todavía tienen comportamiento diverso, y que son fundamentales para obtener resultados para mapas más generales.

Algunos ejemplos

1. El problema de la compacidad (Schwartz, Nordgren, McCluer, Bourdon, Taylor, Sundberg, ...,Shapiro; 1969-1989)
2. La norma esencial de un operador de composición (1989, Joel Shapiro).
3. La norma de operadores de Composición (Cowen 1986), solo transformaciones bilineales.
4. Cuando un operador de Composición es de Riesz (Taylor, Bourdon, Smidth, Stegenga, Shapiro, Corradini 1973-1999).
5. El espectro de operadores de Composición (Nordgren, Cowen). Transformaciones bilineales.
6. Cuando un operador de Composición es Fredholm (McCluer).
7. Cuando un operador de Composición es fuertemente compacto (Lacruz, Shapiro) para transformaciones bilineales.

Clasificación auto-transformaciones bilineales del disco

En el plano ampliado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

1. Un único punto fijo. φ es conjugado de una traslación $z \to z + \eta$.
2. Dos puntos fijos. φ es conjugado de una dilatación $z \to \lambda z$.
    1. Elíptico si $|\lambda| = 1$.
    2. Hiperbólico si $\lambda > 0$.
    3. Loxodrómico si no es ni elíptico ni hiperbólico.

Auto-transformaciones del disco

Únicamente es posible analizarlos y conocer sus propiedades a través de la localización de los puntos fijos.

Parte 1. Simplificación y extensión de los resultados conocidos

El problema del conmutante mínimo para operadores de composición

C.C. Cowen, B.D. MacCluer, Some problems on composition operators, in: Studies on Composition Operators, Laramie, WY, 1996, in: Contemp. Math., vol. 213, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 17–25, MR1601056.

T. Worner

T. Worner, Commutants of certain composition operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 68 (1–2) (2002) 413–432, MR1916588 (2003h:47047).

Teorema (Worner)

Si φ es una auto-transformación bilineal del disco de tipo hiperbólico no automorfismo y todas las sucesiones de iteradas son de interpolación. Entonces C_φ no tiene la propiedad del conmutante mínimo.

Eliminando la hipótesis de interpolación.

En muchos de los casos existe $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $C_\varphi b = b$, esto hace que $M_b f = b \cdot f \in \{C_\varphi\}'$.

Teorema

Si φ no es constante y $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ es una autofunción asociada al autovalor 1, entonces $M_b \notin \overline{\mathrm{Alg}(C_\varphi)}$

B. Cload

B.A. Cload, Generating the commutant of a composition operator, in: Studies on Composition Operators, Laramie, WY, 1996, in: Contemp. Math., vol. 213, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 11–15, MR1601052.

B. Cload, Toeplitz operators in the commutant of a composition operator, Studia Math. 133 (2) (1999) 187–196, MR1686697 (2001c:47036).

Teorema (Cload)

Si $\varphi(z) = \alpha z$ con α rotación irracional, entonces si M_b conmuta con C_φ debe ser φ igual a constante.

Cuestión

Si $\varphi(z) = \alpha z$, ¿Tiene $\varphi(z)$ conmutante mínimo?

Teorema

Si $\varphi(z) = \alpha z$, C_φ tiene conmutante mínimo si y sólo si α no es una raiz n-ésima de la unidad.

Cuestión

Si $\varphi(z) = \alpha z$, ¿Tiene $\varphi(z)$ conmutante mínimo?

Teorema

Si $\varphi(z) = \alpha z$, C_φ tiene conmutante mínimo si y sólo si α no es una raiz n-ésima de la unidad.

Teorema (Rudin-Carleson)

Sea $E \subset \partial D$ un subconjunto cerrado de medida de Lebesgue cero y sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces existe $g \in A(\mathbb{D})$ tal que $g|E = f$ y $\|g\| \leq \|f\|_E$.

Tipo de φ	P. Conmutante Mín.
Elíptico automorfismo	Solo si es una rotación irracional
Parabólico automorfismo	No
Parabólico no automorfismo	Si
Hiperbólico automorfismo	No
Hiperbólico no automorfismo	No
Loxodrómico	Si

Parte 2. Extensión a aplicaciones más generales

Teorema

Sea φ una aplicación univalente $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ con un punto fijo interior. Sea σ la función de König de la función φ y supongamos que el rango $\sigma(\mathbb{D})$ es un dominio acotado, estrictamente estrellado respecto del origen. Entonces C_φ tiene conmutante mínimo.

Cuestión Worner

Los operadores de composición compactos con símbolo univalente ¿tienen la propiedad del conmutante mínimo?

Teorema

Supongamos que φ es univalente ($\varphi(0) = 0$) y supongamos que $\sigma(\mathbb{D})$ es acotado y estrellado. Si el rango de C_φ no es denso, entonces C_φ no tiene la propiedad de conmutante mínimo.