Generalizaciones de la convergencia estadística

María del Carmen Listán García

I Workshop Análisis Funcional
Jerez 6 septiembre
Montecastillo

Contenido

Contenido

1. Introducción a la convergencia estadística.
2. Introducción a la convergencia $f-$estadística.

Contenido

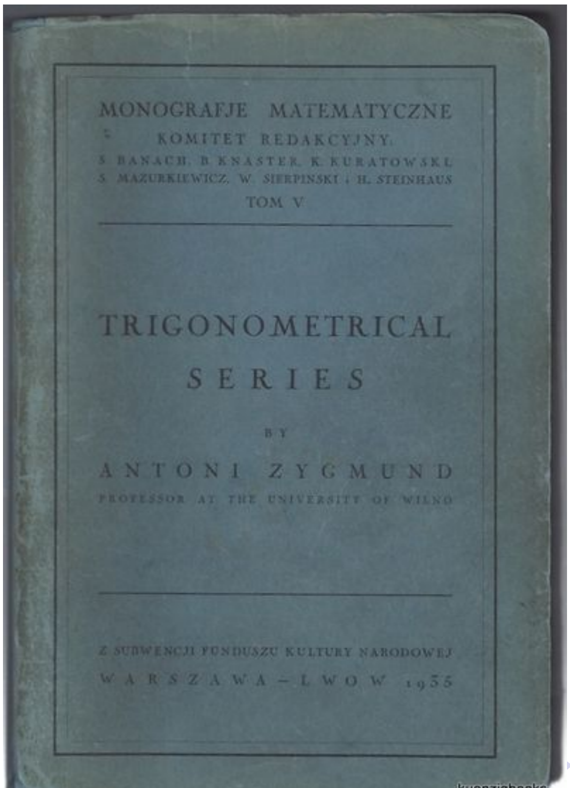
Contenido

1. Introducción a la convergencia estadística.

La idea de convergencia estadística se debe a A. Zygmund en la primera edición de su monografía "Trigonometrical Series" publicada en Varsovia en 1935 bajo el nombre de **"casi convergencia"** ("almost convergence").

1. Introducción a la convergencia estadística.

La idea de convergencia estadística se debe a A. Zygmund en la primera edición de su monografía "Trigonometrical Series" publicada en Varsovia en 1935 bajo el nombre de **"casi convergencia"** ("almost convergence").



Zygmund introdujo este concepto para sucesiones o series de la siguiente manera:

Zygmund introdujo este concepto para sucesiones o series de la siguiente manera:

We shall say that a sequence $\{s_k\}$, or a series with partial sums s_k, is *almost convergent* to limit (sum) s if there is a sequence $\{n_k\}$ of density 1 such that $s_{n_k} \to s$. Since the intersection of two sequences $\{n_k\}$ of density 1 has infinitely many terms (indeed, is of density 1), the number s is determined uniquely.

Zygmund introdujo este concepto para sucesiones o series de la siguiente manera:

We shall say that a sequence $\{s_k\}$, or a series with partial sums s_k, is *almost convergent* to limit (sum) s if there is a sequence $\{n_k\}$ of density 1 such that $s_{n_k} \to s$. Since the intersection of two sequences $\{n_k\}$ of density 1 has infinitely many terms (indeed, is of density 1), the number s is determined uniquely.

donde definió la densidad de un conjunto como:

Zygmund introdujo este concepto para sucesiones o series de la siguiente manera:

We shall say that a sequence $\{s_k\}$, or a series with partial sums s_k, is *almost convergent* to limit (sum) s if there is a sequence $\{n_k\}$ of density 1 such that $s_{n_k} \to s$. Since the intersection of two sequences $\{n_k\}$ of density 1 has infinitely many terms (indeed, is of density 1), the number s is determined uniquely.

donde definió la densidad de un conjunto como:

Let
$$(S) \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$
be an increasing sequence of positive integers, and let $\nu(N)$ denote the number of the $n_k \leqslant N$. The number $d_N = \nu(N)/(N+1)$ is the density of S in the interval $(0, N)$, and the limit $d = \lim d_N$, if it exists, will be called the *density* of S. The sequence of positive integers complementary to S has then the density $1-d$. Only the cases $d=0$ and $d=1$ will be of interest to us. It is easily verified that $d=1$ if and only if $k/n_k \to 1$, and $d=0$ if and only if $k/n_k \to 0$.

Zygmund introdujo este concepto para sucesiones o series de la siguiente manera:

We shall say that a sequence $\{s_k\}$, or a series with partial sums s_k, is *almost convergent* to limit (sum) s if there is a sequence $\{n_k\}$ of density 1 such that $s_{n_k} \to s$. Since the intersection of two sequences $\{n_k\}$ of density 1 has infinitely many terms (indeed, is of density 1), the number s is determined uniquely.

donde definió la densidad de un conjunto como:

Let $$(S) \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

be an increasing sequence of positive integers, and let $\nu(N)$ denote the number of the $n_k \leqslant N$. The number $d_N = \nu(N)/(N+1)$ is the density of S in the interval $(0, N)$, and the limit $d = \lim d_N$, if it exists, will be called the *density* of S. The sequence of positive integers complementary to S has then the density $1-d$. Only the cases $d = 0$ and $d = 1$ will be of interest to us. It is easily verified that $d = 1$ if and only if $k/n_k \to 1$, and $d = 0$ if and only if $k/n_k \to 0$.

es decir, $d(A) = \lim_n \dfrac{|A(n)|}{n}$, donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

La densidad verifica las siguientes propiedades:

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$
4. $d(A^c) = 1 - d(A)$

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$
4. $d(A^c) = 1 - d(A)$

En términos de densidades, Zygmund dio una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea casi convergente:

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$
4. $d(A^c) = 1 - d(A)$

En términos de densidades, Zygmund dio una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea casi convergente:

> **We may suppose that $s = 0$. We first prove the following lemma**: ***A necessary and sufficient condition for an $\{s_n\}$ to be almost convergent to 0 is that for any $\epsilon > 0$ the n's such that $|s_n| \leqslant \epsilon$ have density 1.***

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$
4. $d(A^c) = 1 - d(A)$

En términos de densidades, Zygmund dio una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea casi convergente:

> **We may suppose that $s = 0$. We first prove the following lemma:** ***A necessary and sufficient condition for an $\{s_n\}$ to be almost convergent to 0 is that for any $\epsilon > 0$ the n's such that $|s_n| \leqslant \epsilon$ have density 1.***

es decir, una sucesión $(x_n)_n$ es casi convergente a x si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto A con $d(A) = 1$ tal que si $n \in A$ entonces $|x_n - x| \leq \varepsilon$,

La densidad verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$
2. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$
3. $d(\mathbb{N}) = 1$
4. $d(A^c) = 1 - d(A)$

En términos de densidades, Zygmund dio una condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea casi convergente:

> **We may suppose that $s = 0$. We first prove the following lemma:** ***A necessary and sufficient condition for an $\{s_n\}$ to be almost convergent to 0 is that for any $\epsilon > 0$ the n's such that $|s_n| \leqslant \epsilon$ have density 1.***

es decir, una sucesión $(x_n)_n$ es casi convergente a x si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto A con $d(A) = 1$ tal que si $n \in A$ entonces $|x_n - x| \leq \varepsilon$,
o equivalentemente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto A con $d(A) = 0$ tal que si $n \in A$ entonces $|x_n - x| > \varepsilon$.

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

$$(x_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

$$(x_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

Está claro que $\lim_n x_n$ no existe.

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

$$(x_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

Está claro que $\lim_n x_n$ no existe.

Sin embargo, si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

$$(x_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

Está claro que $\lim_n x_n$ no existe.

Sin embargo, si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que

$$d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n} = \lim_n \frac{[\sqrt{n}]}{n} = 0$$

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{R}$ el espacio de Banach de los números reales y consideramos la sucesión

$$(x_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

Está claro que $\lim_n x_n$ no existe.

Sin embargo, si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que

$$d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n} = \lim_n \frac{[\sqrt{n}]}{n} = 0$$

así, que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n| < \varepsilon$ tiene densidad 1, luego $(x_n)_n$ casi converge a 0.

El concepto de convergencia estadística fue definido formalmente, hace poco más de medio siglo, por H. Steinhaus en una conferencia en la universidad de Wroclow (Polonia) en 1949.

El concepto de convergencia estadística fue definido formalmente, hace poco más de medio siglo, por H. Steinhaus en una conferencia en la universidad de Wroclow (Polonia) en 1949.

H. Steinhaus, “Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique”, Colloquium Mathematicum, Vol. 2, 1951, pp. 73–74.

El concepto de convergencia estadística fue definido formalmente, hace poco más de medio siglo, por H. Steinhaus en una conferencia en la universidad de Wroclow (Polonia) en 1949.

H. Steinhaus, "Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique", Colloquium Mathematicum, Vol. 2, 1951, pp. 73–74.

H. Fast en 1951 introdujo una extensión del concepto de convergencia estadística en:

El concepto de convergencia estadística fue definido formalmente, hace poco más de medio siglo, por H. Steinhaus en una conferencia en la universidad de Wroclow (Polonia) en 1949.

H. Steinhaus, “Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique”, Colloquium Mathematicum, Vol. 2, 1951, pp. 73–74.

H. Fast en 1951 introdujo una extensión del concepto de convergencia estadística en:

Fast, H. “Sur la convergence statistique”. (French) Colloquium Math. 2 (1951), 241–244 (1952)

SUR LA CONVERGENCE STATISTIQUE*

PAR

H. FAST (WROCŁAW)

Soit $\{k_n\}$ une suite croissante de nombres naturels. Désignons par i_n le nombre des termes $k_j \leqslant n$. Si la limite $\lim i_n/n$ existe nous l'appellons *fréquence* de $\{k_n\}$ dans la suite de tous les nombres naturels (ou fréquence de $\{k_n\}$, tout court). $W(x)$ étant une fonction propositionnelle et $\{a_n\}$ étant une suite, nous désignerons par $\operatorname{fr}_n [W(a_n)]$ la fréquence de la suite des nombres n pour lesquels $W(a_n)$ est vérifiée.

Définition 1. Une suite $\{a_n\}$ de nombres réels est dite *mesurable* si $\operatorname{fr}_n [a_n < a]$ existe pour tout a sauf pour les valeurs exceptionnelles qui constituent un ensemble au plus dénombrable.

Définition 2. Nous disons que la suite $\{a_n\}$ *converge statistiquement vers* a si elle est mesurable et si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\operatorname{fr}_n [|a_n - a| \geqslant \varepsilon] = 0$. Nous écrivons alors $\lim \operatorname{stat} a_n = a$.

Evidemment

(i) la condition $\lim \operatorname{stat} a_n = a$ équivaut à ce qu'il existe une suite $\varepsilon_j \to 0$, $\varepsilon_j > 0$ telle que $\operatorname{fr}_n [|a_n - a| > \varepsilon_j] = 0$ pour tout j,

(ii) les théorèmes élémentaires sur la somme, la différence, le produit et le quotient de deux suites convergentes sont aussi valables pour les suites statistiquement convergentes.

Nous aurons encore besoin de la proposition suivante qu'on prouve sans difficulté:

(iii) pour une suite bornée $\{a_n\}$ de nombres non négatifs, la condition $\lim \operatorname{stat} a_n = 0$ équivaut à $\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$.

---

* La démonstration primitive du théorème de la page 242 présentée le 18 février 1949 par H. Steinhaus à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique (cf. ce volume, p. 73) est remplacée ici par une version simplifiée et basée sur les idées de A. Zygmund et les miennes.

Finalmente, decir que multitud de generalizaciones y aplicaciones sobre este tema se han discutido en varias áreas como:

Finalmente, decir que multitud de generalizaciones y aplicaciones sobre este tema se han discutido en varias áreas como:

- Teoría de la medida.
- Teoría de aproximación.
- Espacios localmente convexos.
- Estudio de la compactificación de Stone-Čech del conjunto de los números naturales.
- Análisis de Fourier.
- Teoría de números.
- ...

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

1. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

1. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para cada $x, y \geq 0$

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

1. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para cada $x, y \geq 0$
3. f es creciente

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

1. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para cada $x, y \geq 0$
3. f es creciente
4. f es continua a la derecha del cero

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

1. $f(x) = 0 \iff x = 0$
2. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para cada $x, y \geq 0$
3. f es creciente
4. f es continua a la derecha del cero

EJEMPLOS:

2. Introducción a la convergencia f-estadística.

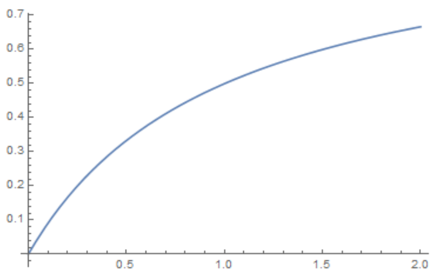
El concepto de convergencia $f-$estadística fue introducido por Antonio Aizpuru en el año 2007, como sigue:

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una **función módulo** o simplemente **módulo** que verifica:

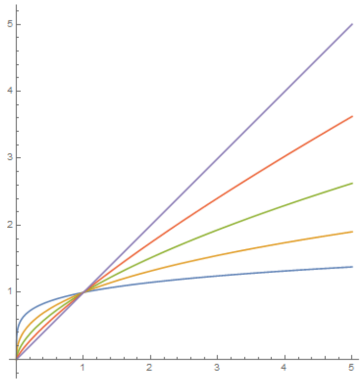
1. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para cada $x, y \geq 0$
3. f es creciente
4. f es continua a la derecha del cero

EJEMPLOS:

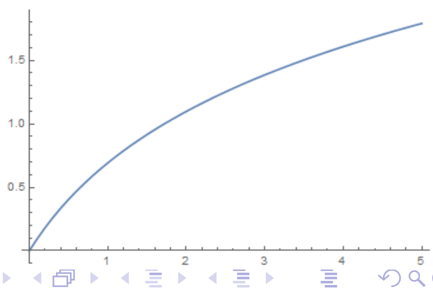
$f(x) = \frac{x}{1+x}$



$f(x) = x^p$, con $0 < p \leq 1$



$f(x) = \log(1 + x)$



A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$
2. $d_f(A \cup B) \leq d_f(A) + d_f(B)$

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$
2. $d_f(A \cup B) \leq d_f(A) + d_f(B)$
3. $d_f(\mathbb{N}) = 1$

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$
2. $d_f(A \cup B) \leq d_f(A) + d_f(B)$
3. $d_f(\mathbb{N}) = 1$
4. $d_f(A^c) \neq 1 - d_f(A)$ (en general)

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$
2. $d_f(A \cup B) \leq d_f(A) + d_f(B)$
3. $d_f(\mathbb{N}) = 1$
4. $d_f(A^c) \neq 1 - d_f(A)$ (en general)
   Consideramos $f(x) = \log(1 + x)$, entonces si P denota el conjunto de los números pares e I el de los impares tenemos que $P = I^c$ sin embargo,

$$d_f(P) = d_f(I) = \lim_n \frac{\log([n/2])}{\log(n)} = 1$$

A partir de un módulo se introduce el concepto de $f-$densidad de un conjunto de números naturales como

$$d_f(A) = \lim_n \frac{f(|A(n)|)}{f(n)}$$

donde $A(n) = \{k \in A \ : \ k \leq n\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_f(A) \leq 1$
2. $d_f(A \cup B) \leq d_f(A) + d_f(B)$
3. $d_f(\mathbb{N}) = 1$
4. $d_f(A^c) \neq 1 - d_f(A)$ (en general)
   Consideramos $f(x) = \log(1 + x)$, entonces si P denota el conjunto de los números pares e I el de los impares tenemos que $P = I^c$ sin embargo,
   $$d_f(P) = d_f(I) = \lim_n \frac{\log([n/2])}{\log(n)} = 1$$
5. Si $d_f(A) = 0$ entonces $d_f(A^c) = 1$.