Definición

Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que el límite $f-$estadístico de $(x_n)_n$ es x y escribiremos $f-\operatorname{stlim} x_n = x$ si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| > \varepsilon\}) = 0$$

Definición

Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que el límite $f-$estadístico de $(x_n)_n$ es x y escribiremos $f - \mathrm{stlim}\, x_n = x$ si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| > \varepsilon\}) = 0$$

	usual	$f-$estadística para todo módulo	$f-$estadística para algún módulo	estadística
usual		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$f-$estadística para todo módulo	$\Rightarrow$		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$f-$estadística para algún módulo	$\not\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$		$\Rightarrow$ $d_f(A) = 0 \Rightarrow d(A) = 0$
estadística	$\not\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$ (*)	$\Rightarrow$ para $f = id$	

Definición

Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que el límite $f-$estadístico de $(x_n)_n$ es x y escribiremos $f-\text{stlim}\, x_n = x$ si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| > \varepsilon\}) = 0$$

	usual	$f-$estadística para todo módulo	$f-$estadística para algún módulo	estadística
usual		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$f-$estadística para todo módulo	$\Rightarrow$		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$f-$estadística para algún módulo	$\not\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$		$\Rightarrow$ $d_f(A) = 0 \Rightarrow d(A) = 0$
estadística	$\not\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$ (*)	$\Rightarrow$ para $f = id$	

(*) si consideramos la sucesión $(x_n) = (1, 0, 0, 1, 0, 0 \dots)$ y la función módulo $f(x) = \log(1 + x)$, entonces como ya vimos $\text{stlim}\, x_n = 0$ sin embargo $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$, luego no puede existir el $f-$estadístico límite.

3. Primeros resultados sobre la convergencia $f-$estadística.

Teorema (Caracterización de la convergencia $f-$estadística)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio normado X y f un módulo no acotado. Entonces $f-\operatorname{stlim}_n x_n = x$ si y sólo si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $d_f(A) = 0$ y $\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus A} x_n = x$.

3. Primeros resultados sobre la convergencia $f-$estadística.

Teorema (Caracterización de la convergencia $f-$estadística)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio normado X y f un módulo no acotado. Entonces $f-\operatorname{stlim}_n x_n = x$ si y sólo si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $d_f(A) = 0$ y $\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus A} x_n = x$.

Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_f(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_N\| > \varepsilon\}) = 0$.

3. Primeros resultados sobre la convergencia $f-$estadística.

Teorema (Caracterización de la convergencia $f-$estadística)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio normado X y f un módulo no acotado. Entonces $f - \operatorname{stlim}_n x_n = x$ si y sólo si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $d_f(A) = 0$ y $\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus A} x_n = x$.

Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x_N\| > \varepsilon\}) = 0$.

Teorema

Sea X un espacio de Banach, f un módulo no acotado y sea $(x_n)_n$ una sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy. Entonces $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.

Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $d_f(A) = 1$.

Lema

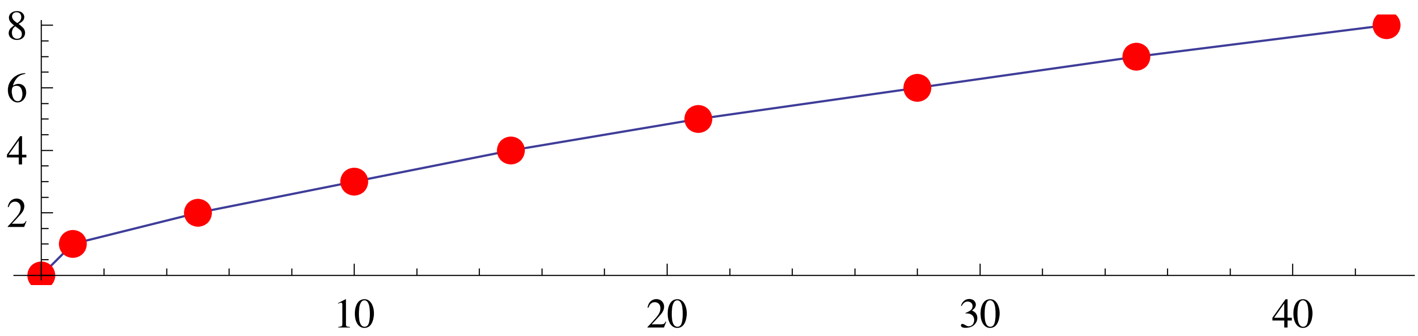
Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $d_f(A) = 1$.

Por ejemplo si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \; : \; n = k^2$ para algún $k \in \mathbb{N}\}$, la correspondiente función módulo que nos proporciona el lema es:

Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $d_f(A) = 1$.

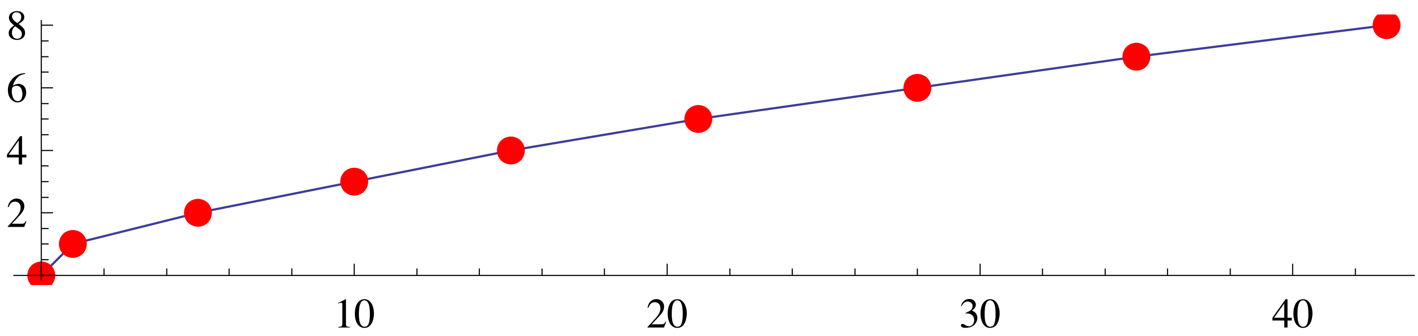
Por ejemplo si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \;:\; n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, la correspondiente función módulo que nos proporciona el lema es:



Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $d_f(A) = 1$.

Por ejemplo si consideramos $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n = k^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, la correspondiente función módulo que nos proporciona el lema es:



Teorema

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Si para cada módulo no acotado f existe el $f-\operatorname{stlim}_n x_n$ entonces todos estos límites son el mismo $x \in X$ y $(x_n)_n$ converge a x en sentido ordinario.

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0, \infty)$ por segmentos.

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\,g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0, \infty)$ por segmentos.

Observemos que:

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0,\infty)$ por segmentos.

Observemos que:
$$\frac{f(g(2)) - f(g(1))}{g(2) - g(1)} \leq 1$$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\,g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0, \infty)$ por segmentos.

Observemos que:
$\dfrac{f(g(2)) - f(g(1))}{g(2) - g(1)} \leq 1$ y si $k \geq 2$, $\dfrac{f(g(k+1)) - f(g(k))}{g(k+1) - g(k)} \leq \dfrac{f(g(k)) - f(g(k-1))}{g(k) - g(k-1)}$

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0, \infty)$ por segmentos.

Observemos que:

$$\frac{f(g(2)) - f(g(1))}{g(2) - g(1)} \leq 1 \text{ y si } k \geq 2,\ \frac{f(g(k+1)) - f(g(k))}{g(k+1) - g(k)} \leq \frac{f(g(k)) - f(g(k-1))}{g(k) - g(k-1)}$$

de aquí se deduce que las correspondientes pendientes de los segmentos que forman la gráfica de f van decreciendo y que si $x, y \in [0, +\infty)$ entonces $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:
$g(1) = 1$
$g(2) = \min\{n : |A(n)| = 2\}$
y si $k \geq 2$, $g(k+1) = \max\{\min\{n : |A(n)| = 1 + g(k)\}, 2\, g(k) - g(k-1)\}$.

Tenemos que g así definida es creciente y además se verifica que

$$|A(g(k+1))| \geq 1 + g(k).$$

Definimos ahora $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la siguiente forma:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

$n \in \mathbb{N}$, $f(g(n)) = n$ y extendemos f con continuidad a $[0, \infty)$ por segmentos.

Observemos que:
$$\frac{f(g(2)) - f(g(1))}{g(2) - g(1)} \leq 1 \text{ y si } k \geq 2, \ \frac{f(g(k+1)) - f(g(k))}{g(k+1) - g(k)} \leq \frac{f(g(k)) - f(g(k-1))}{g(k) - g(k-1)}$$

de aquí se deduce que las correspondientes pendientes de los segmentos que forman la gráfica de f van decreciendo y que si $x, y \in [0, +\infty)$ entonces $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
Por tanto tenemos que f es un módulo no acotado.

Veamos que $d_f(A) = 1$.

Veamos que $d_f(A) = 1$.

Para $k > g(2)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n+1) \leq k \leq g(n+2)$.

Veamos que $d_f(A) = 1$.

Para $k > g(2)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n+1) \leq k \leq g(n+2)$.

Y entonces será

Veamos que $d_f(A) = 1$.

Para $k > g(2)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n+1) \leq k \leq g(n+2)$.

Y entonces será

$$\frac{f(|A(k)|)}{f(k)} \geq \frac{f(|A(g(n+1))|)}{f(g(n+1))} \geq \frac{f(1+g(n))}{f(g(n+2))} \geq \frac{f(g(n))}{f(g(n+2))} = \frac{n}{n+2} \to 1.$$

Veamos que $d_f(A) = 1$.

Para $k > g(2)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n+1) \leq k \leq g(n+2)$.

Y entonces será

$$\frac{f(|A(k)|)}{f(k)} \geq \frac{f(|A(g(n+1))|)}{f(g(n+1))} \geq \frac{f(1+g(n))}{f(g(n+2))} \geq \frac{f(g(n))}{f(g(n+2))} = \frac{n}{n+2} \to 1.$$

Luego de aquí se deduce que $d_f(A) = 1$.

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \dfrac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \dfrac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \frac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \frac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde $A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$
2. $d_{2,f}(A \cup B) \leq d_{2,f}(A) + d_{2,f}(B)$

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \frac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$
2. $d_{2,f}(A \cup B) \leq d_{2,f}(A) + d_{2,f}(B)$
3. Si $d_{2,f}(\mathbb{N}^2)$ existe debe ser 1

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \frac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$
2. $d_{2,f}(A \cup B) \leq d_{2,f}(A) + d_{2,f}(B)$
3. Si $d_{2,f}(\mathbb{N}^2)$ existe debe ser 1
   Se puede construir un módulo g que verifica que

$$\liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g(|\mathbb{N}^2(p,q,i,j)|)}{g(pq)} = \liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g((p-i+1)(q-j+1))}{g(pq)} \leq \frac{1}{2}$$

   y por lo tanto $d_{2,g}(\mathbb{N}^2)$ no existe.

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \dfrac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$
2. $d_{2,f}(A \cup B) \leq d_{2,f}(A) + d_{2,f}(B)$
3. Si $d_{2,f}(\mathbb{N}^2)$ existe debe ser 1
   Se puede construir un módulo g que verifica que
   $$\liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g(|\mathbb{N}^2(p,q,i,j)|)}{g(pq)} = \liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g((p-i+1)(q-j+1))}{g(pq)} \leq \frac{1}{2}$$
   y por lo tanto $d_{2,g}(\mathbb{N}^2)$ no existe.
4. $d_{2,f}(A^c) \neq 1 - d_{2,f}(A)$ (en general)

f- densidad doble y convergencia estadística

Sea f una función módulo no acotada, se define la $f-$**densidad doble** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}^2$ por $d_{2,f}(A) = \lim_{i,j} \lim_{p,q} \frac{f(|A(p,q,i,j)|)}{f(pq)}$ siempre que el límite más exterior exista en sentido Prinsgheim, donde
$A(p,q,i,j) = \{(a,b) \in A : i \leq a \leq p, j \leq b \leq q\}$.

Propiedades:

1. $0 \leq d_{2,f}(A) \leq 1$
2. $d_{2,f}(A \cup B) \leq d_{2,f}(A) + d_{2,f}(B)$
3. Si $d_{2,f}(\mathbb{N}^2)$ existe debe ser 1
   Se puede construir un módulo g que verifica que
   $$\liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g(|\mathbb{N}^2(p,q,i,j)|)}{g(pq)} = \liminf_{i,j} \liminf_{p,q} \frac{g((p-i+1)(q-j+1))}{g(pq)} \leq \frac{1}{2}$$
   y por lo tanto $d_{2,g}(\mathbb{N}^2)$ no existe.
4. $d_{2,f}(A^c) \neq 1 - d_{2,f}(A)$ (en general)
5. Si f es una función módulo tal que $d_{2,f}(\mathbb{N}^2) = 1$ entonces si $d_{2,f}(A) = 0$ se tiene que $d_{2,f}(A^c) = 1$

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

1. $\sup_m \liminf_r \frac{f(r(1-\frac{1}{m}))}{f(r)} = 1.$

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

1. $\sup_m \liminf_r \dfrac{f(r(1-\frac{1}{m}))}{f(r)} = 1.$
2. Que f sea finalmente cóncava.

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

1. $\sup_m \liminf_r \dfrac{f(r(1-\frac{1}{m}))}{f(r)} = 1.$
2. Que f sea finalmente cóncava.
3. $\inf_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{f(n)}{n} > 0.$

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

1. $\sup_m \liminf_r \dfrac{f(r(1-\frac{1}{m}))}{f(r)} = 1.$
2. Que f sea finalmente cóncava.
3. $\inf_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{f(n)}{n} > 0.$

Definición

Sea X un espacio normado y $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión de X. Diremos que $(x_{ij})_{ij}$ es $f-$estadísticamente convergente a x, y escribiremos $f - \operatorname{stlim}_{ij} x_{ij} = x$, si para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que $d_{2,f}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \|x_{ij} - x\| > \varepsilon\}) = 0$.

Propiedad suficientes para que exista la densidad de $\mathbb{N}^2$:

1. $\sup_m \liminf_r \dfrac{f(r(1-\frac{1}{m}))}{f(r)} = 1.$
2. Que f sea finalmente cóncava.
3. $\inf_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{f(n)}{n} > 0.$

Definición

Sea X un espacio normado y $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión de X. Diremos que $(x_{ij})_{ij}$ es $f-$estadísticamente convergente a x, y escribiremos $f - \operatorname{stlim}_{ij} x_{ij} = x$, si para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que $d_{2,f}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \|x_{ij} - x\| > \varepsilon\}) = 0$.

Teorema (Caracterización de la convergencia $f-$estadística doble)

Sea $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión en un espacio normado X y f un módulo no acotado. Entonces $f - \operatorname{stlim}_{ij} x_{ij} = x$ si y sólo si existe $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que $d_{2,f}(A) = 0$ y $\lim_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus A} x_{ij} = x$.

Definición

Diremos que la sucesión doble $(x_{ij})_{ij}$ *es* $f-$*estadísticamente de Cauchy si para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada* $l \in \mathbb{N}$ *existen* $M, N \geq l$ *tal que*

$$d_{2,f}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \|x_{ij} - x_{MN}\| > \varepsilon\}) = 0.$$

Definición

Diremos que la sucesión doble $(x_{ij})_{ij}$ es $f-$estadísticamente de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $l \in \mathbb{N}$ existen $M, N \geq l$ tal que

$$d_{2,f}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \|x_{ij} - x_{MN}\| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio de Banach, f un módulo no acotado y sea $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión doble en X, entonces si $(x_{ij})_{ij}$ es $f-$estadísticamente de Cauchy, $(x_{ij})_{ij}$ es $f-$estadísticamente convergente.

Teorema

Sea $(x_{ij})_{ij}$ *una sucesión en* X*. Si para cada módulo no acotado* f *existe* $f-\operatorname{stlim}_{ij} x_{ij}$ *entonces todos estos límites son el mismo* $x \in X$ *y* $(x_{ij})_{ij}$ *converge a* x *en sentido Prinsgheim.*

Teorema

Sea $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión en X. Si para cada módulo no acotado f existe $f-\operatorname{stlim}_{ij} x_{ij}$ entonces todos estos límites son el mismo $x \in X$ y $(x_{ij})_{ij}$ converge a x en sentido Prinsgheim.

Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $\lim_k \frac{f(|A(k)|)}{f(k^2)} = 1$.

Teorema

Sea $(x_{ij})_{ij}$ *una sucesión en* X*. Si para cada módulo no acotado* f *existe* $f-\operatorname{stlim}_{ij} x_{ij}$ *entonces todos estos límites son el mismo* $x \in X$ *y* $(x_{ij})_{ij}$ *converge a* x *en sentido Prinsgheim.*

Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ *es infinito entonces existe un módulo no acotado* f *tal que* $\lim_k \frac{f(|A(k)|)}{f(k^2)} = 1$.

Lema

Si $B \subseteq \mathbb{N}$ *es infinito y consideramos* $D_B = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : p = q \in B\}$*, entonces existe un módulo no acotado* g *tal que* $\limsup_{i,j} \limsup_{p,q} \frac{g(|D_B(p,q,i,j)|)}{g(p\ q)} = 1$.

Teorema

Sea $(x_{ij})_{ij}$ una sucesión en X. Si para cada módulo no acotado f existe $f-\operatorname{stlim}_{ij} x_{ij}$ entonces todos estos límites son el mismo $x \in X$ y $(x_{ij})_{ij}$ converge a x en sentido Prinsgheim.

Lema

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito entonces existe un módulo no acotado f tal que $\lim_k \frac{f(|A(k)|)}{f(k^2)} = 1$.

Lema

Si $B \subseteq \mathbb{N}$ es infinito y consideramos $D_B = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : p = q \in B\}$, entonces existe un módulo no acotado g tal que $\limsup_{i,j} \limsup_{p,q} \frac{g(|D_B(p,q,i,j)|)}{g(pq)} = 1$.

Lema

Sea $(p_k)_k$ y $(q_k)_k$ dos sucesiones estrictamente crecientes y consideramos $A = \{(p_k, q_k) : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\max\{p_k, q_k\} : k \in \mathbb{N}\}$ y D_B como en el lema anterior. Dados $i, j \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \geq i$ y $q \geq j$, $|D_B(p,q,i,j)| < |A(p,q,i,j)| + n$.

Convergencia $f-$estadística, completitud y $f-$puntos de acumulación

Definición

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado, diremos que la sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente nula si para cada $\varepsilon > 0$,

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \neq 0\}) = 0.$$

Convergencia $f-$estadística, completitud y $f-$puntos de acumulación

Definición

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado, diremos que la sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente nula si para cada $\varepsilon > 0$,

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \neq 0\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado. Si $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente convergente entonces tiene una subsucesión convergente.

Convergencia $f-$estadística, completitud y $f-$puntos de acumulación

Definición

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado, diremos que la sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente nula si para cada $\varepsilon > 0$,

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \neq 0\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado. Si $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente convergente entonces tiene una subsucesión convergente.

Teorema

Sea X un espacio normado y f un módulo no acotado. Si $(x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente de Cauchy, entonces tiene una subsucesión de Cauchy.

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*
3. *Existe un módulo no acotado f tal que si la sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy entonces es $f-$estadísticamente convergente.*

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*
3. *Existe un módulo no acotado f tal que si la sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy entonces es $f-$estadísticamente convergente.*

Definición

Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_n \subseteq X$ entonces para cada $K \subset \mathbb{N}$ infinito,

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*
3. *Existe un módulo no acotado f tal que si la sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy entonces es $f-$estadísticamente convergente.*

Definición

Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_n \subseteq X$ entonces para cada $K \subset \mathbb{N}$ infinito,

- *si $d(K) = 0$, entonces $(x_n)_{n \in K}$ se dice que es una subsucesión fina de $(x_n)_n$; en otro caso, se dice que es no-fina.*

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*
3. *Existe un módulo no acotado f tal que si la sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy entonces es $f-$estadísticamente convergente.*

Definición

Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_n \subseteq X$ entonces para cada $K \subset \mathbb{N}$ infinito,

- *si $d(K) = 0$, entonces $(x_n)_{n \in K}$ se dice que es una subsucesión fina de $(x_n)_n$; en otro caso, se dice que es no-fina.*
- *si $d_f(K) = 0$, entonces $(x_n)_{n \in K}$ se dice que es una subsucesión $f-$fina de $(x_n)_n$; en otro caso, se dice que es no$-f-$fina.*

Teorema

Sea X un espacio normado, entonces son equivalentes:

1. *X es completo.*
2. *Para cada módulo no acotado f cada sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy $(x_n)_n$, $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.*
3. *Existe un módulo no acotado f tal que si la sucesión $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente de Cauchy entonces es $f-$estadísticamente convergente.*

Definición

Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_n \subseteq X$ entonces para cada $K \subset \mathbb{N}$ infinito,

- *si $d(K) = 0$, entonces $(x_n)_{n \in K}$ se dice que es una subsucesión fina de $(x_n)_n$; en otro caso, se dice que es no-fina.*
- *si $d_f(K) = 0$, entonces $(x_n)_{n \in K}$ se dice que es una subsucesión $f-$fina de $(x_n)_n$; en otro caso, se dice que es no$-f-$fina.*

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(x_n)_n$ una sucesión $f-$estadísticamente de Cauchy que tiene una subsucesión no$-f-$fina convergente a x, entonces $(x_n)_n$ es $f-$estadísticamente convergente.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

- *$x \in X$ es un punto límite de $\bar{x}$ si existe una subsucesión de $\bar{x}$ que es convergente a x. El conjunto de todos los puntos límites de $\bar{x}$ se denota por $L_{\bar{x}}$.*

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

- *$x \in X$ es un punto límite de $\bar{x}$ si existe una subsucesión de $\bar{x}$ que es convergente a x. El conjunto de todos los puntos límites de $\bar{x}$ se denota por $L_{\bar{x}}$.*
- *$x \in X$ es un punto límite estadístico de $\bar{x}$ si existe una sucesión no$-$fina de $\bar{x}$ convergente a x. El conjunto de todos los puntos límite estadísticos de $\bar{x}$ se denota por $\Lambda_{\bar{x}}$.*

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

- $x \in X$ *es un punto límite de* $\bar{x}$ *si existe una subsucesión de* $\bar{x}$ *que es convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límites de* $\bar{x}$ *se denota por* $L_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto límite estadístico de* $\bar{x}$ *si existe una sucesión no−fina de* $\bar{x}$ *convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límite estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Lambda_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto límite* $f-$*estadístico de* $\bar{x}$ *si existe una subsucesión no−*$f-$*fina de* $\bar{x}$ *que es convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límites* $f-$*estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Lambda^f_{\bar{x}}$.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

- *$x \in X$ es un punto límite de $\bar{x}$ si existe una subsucesión de $\bar{x}$ que es convergente a x. El conjunto de todos los puntos límites de $\bar{x}$ se denota por $L_{\bar{x}}$.*
- *$x \in X$ es un punto límite estadístico de $\bar{x}$ si existe una sucesión no$-$fina de $\bar{x}$ convergente a x. El conjunto de todos los puntos límite estadísticos de $\bar{x}$ se denota por $\Lambda_{\bar{x}}$.*
- *$x \in X$ es un punto límite $f-$estadístico de $\bar{x}$ si existe una subsucesión no$-f-$fina de $\bar{x}$ que es convergente a x. El conjunto de todos los puntos límites $f-$estadísticos de $\bar{x}$ se denota por $\Lambda_{\bar{x}}^f$.*
- *$x \in X$ es un punto de acumulación estadístico de $\bar{x}$ si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| < \varepsilon\}$ no tiene densidad cero. El conjunto de los puntos de acumulación estadísticos de $\bar{x}$ se denota por $\Gamma_{\bar{x}}$.*

Definición

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, se dice que

- $x \in X$ *es un punto límite de* $\bar{x}$ *si existe una subsucesión de* $\bar{x}$ *que es convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límites de* $\bar{x}$ *se denota por* $L_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto límite estadístico de* $\bar{x}$ *si existe una sucesión no−fina de* $\bar{x}$ *convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límite estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Lambda_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto límite* $f-$*estadístico de* $\bar{x}$ *si existe una subsucesión no*$-f-$*fina de* $\bar{x}$ *que es convergente a* x. *El conjunto de todos los puntos límites* $f-$*estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Lambda^f_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto de acumulación estadístico de* $\bar{x}$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| < \varepsilon\}$ *no tiene densidad cero. El conjunto de los puntos de acumulación estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Gamma_{\bar{x}}$.
- $x \in X$ *es un punto de acumulación* $f-$*estadístico de* $\bar{x}$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n - x\| < \varepsilon\}$ *no tiene* $f-$*densidad cero. El conjunto de todos los puntos de acumulación* $f-$*estadísticos de* $\bar{x}$ *se denota por* $\Gamma^f_{\bar{x}}$.

Veamos la relación entre estos conjuntos.

Veamos la relación entre estos conjuntos.

Teorema

Sea $\bar{x}$ una sucesión en un espacio de Banach X y f un módulo no acotado, entonces tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_{\bar{x}} & \subseteq & \Lambda_{\bar{x}}^{f} & & \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \Gamma_{\bar{x}} & \subseteq & \Gamma_{\bar{x}}^{f} & \subseteq & L_{\bar{x}} \end{array}$$

Veamos la relación entre estos conjuntos.

Teorema

Sea $\bar{x}$ una sucesión en un espacio de Banach X y f un módulo no acotado, entonces tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_{\bar{x}} & \subseteq & \Lambda_{\bar{x}}^{f} & & \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \Gamma_{\bar{x}} & \subseteq & \Gamma_{\bar{x}}^{f} & \subseteq & L_{\bar{x}} \end{array}$$

Proposición

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, entonces

$$L_{\bar{x}} = \bigcup \{\Gamma_{\bar{x}}^{f} : f \text{ es un módulo no acotado}\}.$$

Veamos la relación entre estos conjuntos.

Teorema

Sea $\bar{x}$ una sucesión en un espacio de Banach X y f un módulo no acotado, entonces tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_{\bar{x}} & \subseteq & \Lambda_{\bar{x}}^{f} & & \\ \cap\!| & & \cap\!| & & \\ \Gamma_{\bar{x}} & \subseteq & \Gamma_{\bar{x}}^{f} & \subseteq & L_{\bar{x}} \end{array}$$

Proposición

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, entonces

$$L_{\bar{x}} = \bigcup \{\Gamma_{\bar{x}}^{f} : f \text{ es un módulo no acotado}\}.$$

Definición

Una sucesión $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$ es $f-$estadísticamente acotada si existe un conjunto acotado B tal que $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \notin B\}) = 0$.

Teorema

Sea $\bar{x} = (x_n)_n$ *e* $\bar{y} = (y_n)_n$ *dos sucesiones en un espacio normado* X *tal que* $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$, *entonces* $\Lambda^f_{\bar{x}} = \Lambda^f_{\bar{y}}$ *y* $\Gamma^f_{\bar{x}} = \Gamma^f_{\bar{y}}$.

Teorema

Sea $\bar{x} = (x_n)_n$ *e* $\bar{y} = (y_n)_n$ *dos sucesiones en un espacio normado* X *tal que* $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$*, entonces* $\Lambda^f_{\bar{x}} = \Lambda^f_{\bar{y}}$ *y* $\Gamma^f_{\bar{x}} = \Gamma^f_{\bar{y}}$.

Corolario

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$ *una sucesión* $f-$*estadísticamente acotada, entonces el conjunto* $\Gamma^f_{\bar{x}}$ *es acotado.*

Teorema

Sea $\bar{x} = (x_n)_n$ *e* $\bar{y} = (y_n)_n$ *dos sucesiones en un espacio normado* X *tal que* $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$, *entonces* $\Lambda_{\bar{x}}^f = \Lambda_{\bar{y}}^f$ *y* $\Gamma_{\bar{x}}^f = \Gamma_{\bar{y}}^f$.

Corolario

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$ *una sucesión* $f-$*estadísticamente acotada, entonces el conjunto* $\Gamma_{\bar{x}}^f$ *es acotado.*

Teorema

Sea X *un espacio normado y* $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, *entonces existe una sucesión* $\bar{y} = (y_n)_n$ *tal que* $L_{\bar{y}} = \Gamma_{\bar{x}}^f$ *y* $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$

Teorema

Sea $\bar{x} = (x_n)_n$ e $\bar{y} = (y_n)_n$ dos sucesiones en un espacio normado X tal que $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$, entonces $\Lambda^f_{\bar{x}} = \Lambda^f_{\bar{y}}$ y $\Gamma^f_{\bar{x}} = \Gamma^f_{\bar{y}}$.

Corolario

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$ una sucesión $f-$estadísticamente acotada, entonces el conjunto $\Gamma^f_{\bar{x}}$ es acotado.

Teorema

Sea X un espacio normado y $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$, entonces existe una sucesión $\bar{y} = (y_n)_n$ tal que $L_{\bar{y}} = \Gamma^f_{\bar{x}}$ y $d_f(\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}) = 0$

Corolario

Sea $\bar{x} = (x_n)_n \subseteq X$ una sucesión, entonces el conjunto $\Gamma^f_{\bar{x}}$ es cerrado.

Hemos intentando hacer un resultado análogo al de Connor, Ganichev y Kadets.

Hemos intentando hacer un resultado análogo al de Connor, Ganichev y Kadets.

THEOREM 2. *Let B be a separable Banach space. Then B has a separable dual if and only if every bounded weakly statistically null sequence agrees with a weakly null sequence on almost all indices.*

Hemos intentando hacer un resultado análogo al de Connor, Ganichev y Kadets.

THEOREM 2. *Let B be a separable Banach space. Then B has a separable dual if and only if every bounded weakly statistically null sequence agrees with a weakly null sequence on almost all indices.*

Definición

La sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ *es débil* $f-$*estadísticamente convergente a* x *si* $f-\operatorname{stlim} x^*(x_n) = x^*(x)$ *para cada* $x^* \in X^*$*. Y escribiremos* $w - f - \operatorname{stlim} x_n = x$.

Hemos intentando hacer un resultado análogo al de Connor, Ganichev y Kadets.

THEOREM 2. *Let B be a separable Banach space. Then B has a separable dual if and only if every bounded weakly statistically null sequence agrees with a weakly null sequence on almost all indices.*

Definición

La sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ *es débil* $f-$*estadísticamente convergente a* x *si* $f - \operatorname{stlim} x^*(x_n) = x^*(x)$ *para cada* $x^* \in X^*$. *Y escribiremos* $w - f - \operatorname{stlim} x_n = x$.

Lema

Sea f *un módulo no acotado y* $(A_i)_i \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *una sucesión de* $f-$*densidad cero. Entonces existe una sucesión de conjuntos* $(B_i)_i \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *tales* $B_i \subseteq A_i$ *y* $A_i \setminus B_i$ *es finita para cada* $i \in \mathbb{N}$, *además* $B = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ *tiene* $f-$*densidad cero.*

Hemos intentando hacer un resultado análogo al de Connor, Ganichev y Kadets.

THEOREM 2. *Let B be a separable Banach space. Then B has a separable dual if and only if every bounded weakly statistically null sequence agrees with a weakly null sequence on almost all indices.*

Definición

La sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ *es débil* $f-$*estadísticamente convergente a* x *si* $f - \operatorname{stlim} x^*(x_n) = x^*(x)$ *para cada* $x^* \in X^*$. *Y escribiremos* $w - f - \operatorname{stlim} x_n = x$.

Lema

Sea f *un módulo no acotado y* $(A_i)_i \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *una sucesión de* $f-$*densidad cero. Entonces existe una sucesión de conjuntos* $(B_i)_i \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *tales* $B_i \subseteq A_i$ *y* $A_i \backslash B_i$ *es finita para cada* $i \in \mathbb{N}$, *además* $B = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ *tiene* $f-$*densidad cero.*

Teorema

Sea X *un espacio de Banach con dual separable y* f *un módulo no acotado. Si* $(x_n)_n \subseteq X$ *es una sucesión acotada y* $w - f-$*estadísticamente convergente entonces existe una sucesión* $w-$*convergente* $(y_n)_n$ *tal que el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq y_n\}$ *tiene* $f-$*densidad cero.*

Sobre la convergencia $f-$estadística de sucesiones de funciones

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado. Una sucesión de funciones $(g_n)_n$, es uniformemente $f-$estadísticamente convergente a g en un conjunto $S \subseteq X$ si para cada $\varepsilon > 0$,
$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$. *En este caso escribimos* $f - \operatorname{stlim} g_n(x) = g(x)$ *uniformemente en S.*

Sobre la convergencia $f-$estadística de sucesiones de funciones

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado. Una sucesión de funciones $(g_n)_n$, es uniformemente $f-$estadísticamente convergente a g en un conjunto $S \subseteq X$ si para cada $\varepsilon > 0$, $d_f(\{n \in \mathbb{N}: \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$. En este caso escribimos $f - \operatorname{stlim} g_n(x) = g(x)$ uniformemente en S.

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$, entonces, $f - \operatorname{stlim} g_n(x) = g(x)$ uniformemente en S si y sólo si $f - \operatorname{stlim} \sup\limits_{x \in S} |g_n(x) - g(x)| = 0$.

Sobre la convergencia $f-$estadística de sucesiones de funciones

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado. Una sucesión de funciones $(g_n)_n$, es uniformemente $f-$estadísticamente convergente a g en un conjunto $S \subseteq X$ si para cada $\varepsilon > 0$,
$d_f(\{n \in \mathbb{N} :$ *existe* $x \in S$ *tal que* $|g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$. *En este caso escribimos* $f - \operatorname{stlim} g_n(x) = g(x)$ *uniformemente en S.*

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$, entonces, $f - \operatorname{stlim} g_n(x) = g(x)$ uniformemente en S si y sólo si $f - \operatorname{stlim} \sup_{x \in S} |g_n(x) - g(x)| = 0$.

Teorema

Sea X un espacio normado, $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definidas sobre el conjunto $S \subseteq X$. Si $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente convergente en S para cada módulo no acotado f, entonces $(g_n)_n$ es uniformemente convergente en S al mismo límite.

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones en un conjunto $S \subseteq X$. $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g_N(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones en un conjunto $S \subseteq X$. $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g_N(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$. Entonces son equivalentes:

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones en un conjunto $S \subseteq X$. $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g_N(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$. Entonces son equivalentes:

1. *$(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente convergente en S.*

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones en un conjunto $S \subseteq X$. $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g_N(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$. Entonces son equivalentes:

1. *$(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente convergente en S.*
2. *$(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy en S.*

Definición

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones en un conjunto $S \subseteq X$. $(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_f(\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } |g_n(x) - g_N(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema

Sea X un espacio normado, f un módulo no acotado y $(g_n)_n$ una sucesión de funciones definida en un conjunto $S \subseteq X$. Entonces son equivalentes:

1. *$(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente convergente en S.*
2. *$(g_n)_n$ es uniformemente $f-$estadísticamente de Cauchy en S.*
3. *Existe una sucesión de funciones $(h_n)_n$ uniformemente convergente y tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } x \in S \text{ tal que } g_n(x) \neq h_n(x)\}$ tiene $f-$densidad cero.*

4. Resultados recientes derivados de la convergencia $f-$estadística.

Trabajos derivados de la convergencia $f-$estadística:

4. Resultados recientes derivados de la convergencia $f-$estadística.

Trabajos derivados de la convergencia $f-$estadística:

Gürdal, M.; Özgür, M. O. "A generalized statistical convergence via moduli". Electron. J. Math. Anal. Appl. 3 (2015), no. 2, 173–178.

4. Resultados recientes derivados de la convergencia $f-$estadística.

Trabajos derivados de la convergencia $f-$estadística:

Gürdal, M.; Özgür, M. O. "A generalized statistical convergence via moduli". Electron. J. Math. Anal. Appl. 3 (2015), no. 2, 173–178.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; "$f-$Statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus". J. Inequal. Appl. 2015, 2015–332.

4. Resultados recientes derivados de la convergencia $f-$estadística.

Trabajos derivados de la convergencia $f-$estadística:

Gürdal, M.; Özgür, M. O. "A generalized statistical convergence via moduli". Electron. J. Math. Anal. Appl. 3 (2015), no. 2, 173–178.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; "$f-$Statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus". J. Inequal. Appl. 2015, 2015–332.

Ekrem Savas, Stuti Borgohain, "Some new lacunary $f-$statistical $A-$convergent sequence spaces of order α". arXiv:1506.06085v2

4. Resultados recientes derivados de la convergencia $f-$estadística.

Trabajos derivados de la convergencia $f-$estadística:

- Gürdal, M.; Özgür, M. O. "A generalized statistical convergence via moduli". Electron. J. Math. Anal. Appl. 3 (2015), no. 2, 173–178.
- Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; "$f-$Statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus". J. Inequal. Appl. 2015, 2015–332.
- Ekrem Savas, Stuti Borgohain, "Some new lacunary $f-$statistical $A-$convergent sequence spaces of order α". arXiv:1506.06085v2
- Aral, Nazlim Deniz; Konca, Sükran "Asymptotically $f-$lacunary statistical equivalent of set sequences in Wijsman sense". J. Inequal. Spec. Funct. 9 (2018), no. 2, 1–14.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, “Korovkin type approximation theorems via f-statistical convergence”. J. Math. Anal. 9 (2018), no. 2, 99–117.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, "Korovkin type approximation theorems via f-statistical convergence". J. Math. Anal. 9 (2018), no. 2, 99–117.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; Dovgoshey, Oleksiy A., "Density by moduli and Wijsman statistical convergence". Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24 (2017), no. 3, 393–415.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, “Korovkin type approximation theorems via f-statistical convergence”. J. Math. Anal. 9 (2018), no. 2, 99–117.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; Dovgoshey, Oleksiy A., “Density by moduli and Wijsman statistical convergence”. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24 (2017), no. 3, 393–415.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, “Density by moduli and Wijsman lacunary statistical convergence of sequences of sets”. J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 25, 20 pp.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, "Korovkin type approximation theorems via f-statistical convergence". J. Math. Anal. 9 (2018), no. 2, 99–117.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; Dovgoshey, Oleksiy A., "Density by moduli and Wijsman statistical convergence". Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24 (2017), no. 3, 393–415.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, "Density by moduli and Wijsman lacunary statistical convergence of sequences of sets". J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 25, 20 pp.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta; Gupta, Sandeep, "Density by moduli and statistical boundedness". Abstr. Appl. Anal. 2016, Art. ID 2143018, 6 pp.

Gupta, Sandeep; Bhardwaj, Vinod K., "On deferred $f-$statistical convergence". Kyungpook Math. J. 58 (2018), no. 1, 91–103.

Gupta, Sandeep; Bhardwaj, Vinod K., "On deferred $f-$statistical convergence". Kyungpook Math. J. 58 (2018), no. 1, 91–103.

Bhardwaj, Vinod K.; Dhawan, Shweta, "Korovkin type approximation theorems via $f-$statistical convergence". J. Math. Anal. 9 (2018), no. 2, 99–117.