Symmetry methods and generalizations

Mª Concepción Muriel
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz

I Workshop on Functional Analysis
Cádiz, 5 y 6 septiembre 2018

Ecuaciones diferenciales y simetrías

Técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales y simetrías

Técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales

- Unificación de técnicas clásicas: Sophus Lie (1842-1899)

  - Integración por cuadratura de EDO de primer orden
  - Algébras resolubles: Integración por cuadraturas
  - Linealización de ecuaciones no lineales
  - Reducciones de orden de EDO y reducción del número de variables de EDP

Integración por cuadratura

¿Qué ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver?

Integración por cuadratura

¿Qué ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver?

$u_x = f(x) \to$ Sol: $u(x) = F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

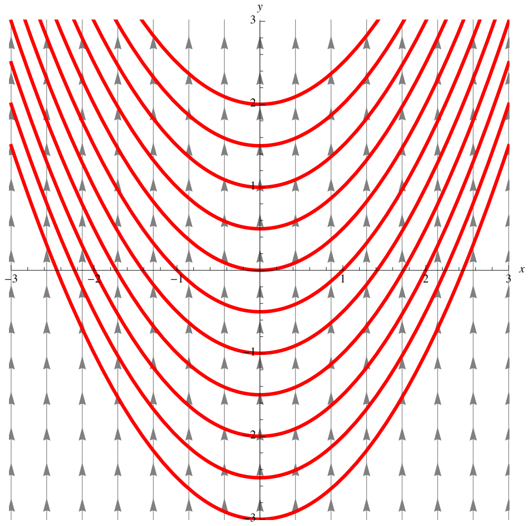


Figura 1: $u_x = x$

Integración por cuadratura

¿Qué ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver?

$u_x = f(x) \rightarrow$ Sol: $u(x) = F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

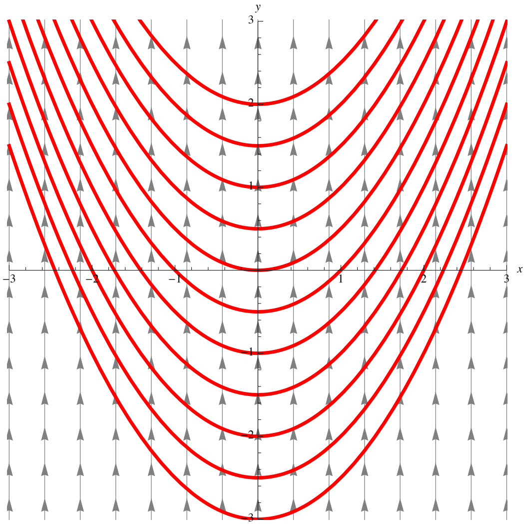


Figura 1: $u_x = x$

Traslaciones paralelas al eje OY transforman gráficas de soluciones en gráficas de soluciones

Integración por cuadratura

¿Qué ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver?

$u_x = f(x) \to$ Sol: $u(x) = F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

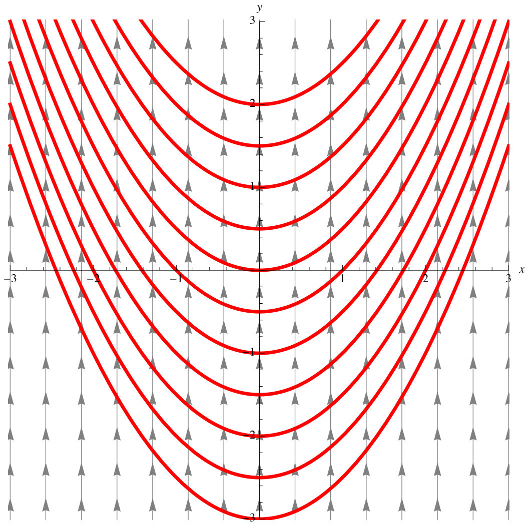


Figura 1: $u_x = x$

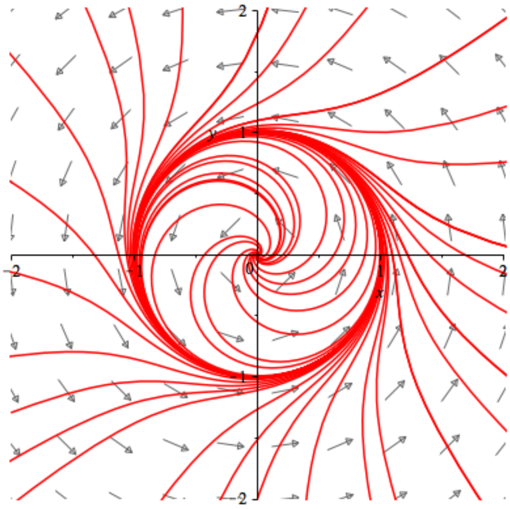


Figura 2: $u_x = \dfrac{u^3 + x^2 u - u - x}{x u^2 + x^3 + u - x}$

Integración por cuadratura

¿Qué ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver?

Si se *enderezan* las flechas grises ¿sería integrable por cuadratura?

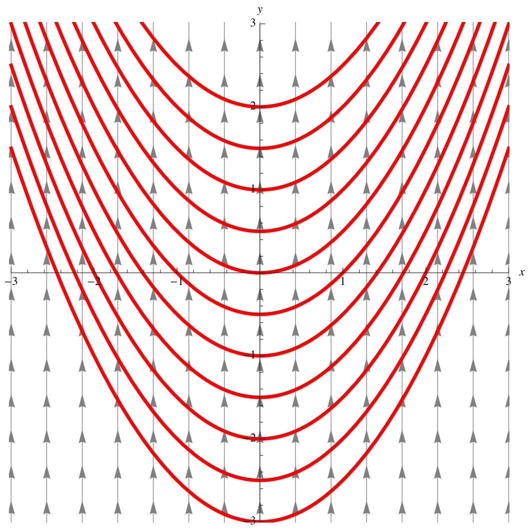


Figura 1: $u_x = x$

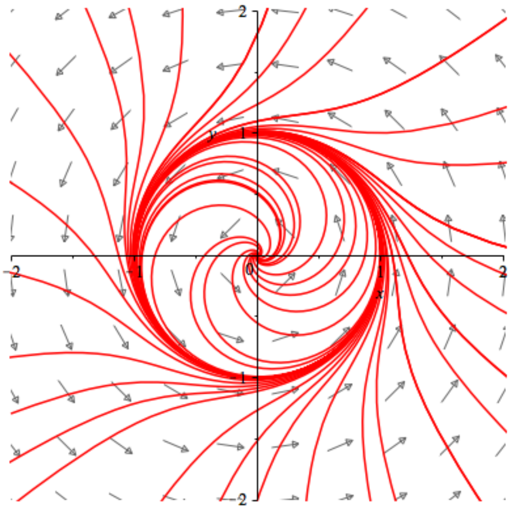


Figura 2: $u_x = \dfrac{u^3 + x^2 u - u - x}{xu^2 + x^3 + u - x}$

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales
$(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales $(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.
2. $\psi : \mathcal{U} \to M$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, que cumple:

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales $(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.
2. $\psi : \mathcal{U} \to M$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, que cumple:

- $\psi\big(\epsilon_2, \psi(\epsilon_1, (x, u))\big) = \psi(\epsilon_1 + \epsilon_2, (x, u))$.

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales $(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.
2. $\psi : \mathcal{U} \to M$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, que cumple:

   - $\psi\big(\epsilon_2, \psi(\epsilon_1, (x, u))\big) = \psi(\epsilon_1 + \epsilon_2, (x, u))$.
   - $(0, (x, u)) \in \mathcal{U}$ y $\psi(0, (x, u)) = (x, u)$.

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales $(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.
2. $\psi : \mathcal{U} \to M$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, que cumple:
   - $\psi\big(\epsilon_2, \psi(\epsilon_1, (x, u))\big) = \psi(\epsilon_1 + \epsilon_2, (x, u))$.
   - $(0, (x, u)) \in \mathcal{U}$ y $\psi(0, (x, u)) = (x, u)$.
   - Existe un $\delta > 0$ tal que $\big(\epsilon, (x, u)\big), \big(-\epsilon, (x, u)\big) \in \mathcal{U}$ para cada ϵ tal que $0 < \epsilon < \delta$.

Grupos de transformaciones

Grupo uniparamétrico local de transformaciones locales $(\mathcal{U}, \psi)$ que actúa en $M \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{U}$ es un abierto tal que $\{0\} \times M \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times M$.
2. $\psi : \mathcal{U} \to M$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, que cumple:
   - $\psi\big(\epsilon_2, \psi(\epsilon_1, (x, u))\big) = \psi(\epsilon_1 + \epsilon_2, (x, u))$.
   - $(0, (x, u)) \in \mathcal{U}$ y $\psi(0, (x, u)) = (x, u)$.
   - Existe un $\delta > 0$ tal que $\big(\epsilon, (x, u)\big), \big(-\epsilon, (x, u)\big) \in \mathcal{U}$ para cada ϵ tal que $0 < \epsilon < \delta$.

Generador infinitesimal del grupo $(\mathcal{U}, \psi)$ es el campo en M :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{v}: & M & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, u) & \mapsto & \left(\dfrac{\partial \psi^1}{\partial \epsilon}(0, (x, u)), \dfrac{\partial \psi^2}{\partial \epsilon}(0, (x, u)) \right). \end{array}$$

Transformación de funciones

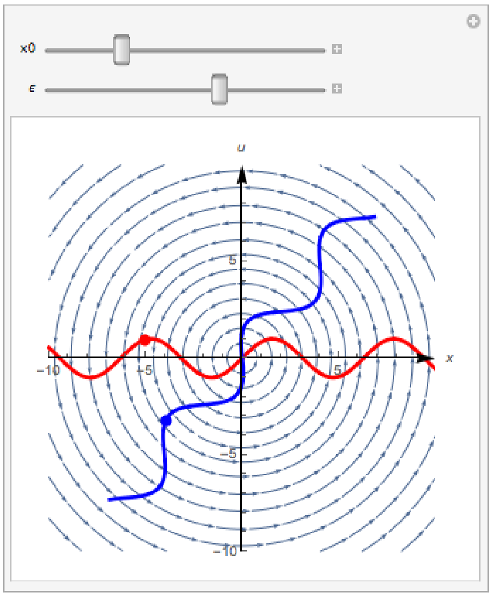
Sea $g \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$, $(\mathcal{U}, \psi)$ grupo de transformaciones sobre M. Para un abierto Ω_0, el conjunto

$$\psi(\epsilon, \Gamma_g) = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = \psi\big(\epsilon, (x, g(x))\big), \text{ con } x \in \Omega_0\}$$

es localmente la gráfica de una función: $\psi_\epsilon(g)$, y será llamada **función transformada de** g por ϵ con respecto a $(\mathcal{U}, \psi)$.

Transformación de funciones

Trasnformación de $f(x) = sen(x)$ por el grupo de las rotaciones $\psi(\epsilon, (x, u)) = (x\cos(\epsilon) - u\,\text{sen}(\epsilon), x\,\text{sen}(\epsilon) + u\cos(\epsilon))$



Prolongación de funciones y soluciones de una EDO

- Una función $g \in \mathcal{C}^p(]a,b[)$ permite definir para cada $n \leq p$, la función

$$
\begin{array}{rccl}
pr^{(n)}g : &]a,b[& \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\
 & x & \rightarrow & (g(x), g'(x), \cdots, g^{n)}(x)),
\end{array}
$$

que se llamará **prolongación** $n-$**ésima** de g.

Prolongación de funciones y soluciones de una EDO

- Una función $g \in \mathcal{C}^p(]a,b[)$ permite definir para cada $n \leq p$, la función

$$\begin{array}{rccl} pr^{(n)}g: &]a,b[& \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \rightarrow & (g(x), g'(x), \cdots, g^{n)}(x)), \end{array}$$

  que se llamará **prolongación** $n-$**ésima** de g.

- Una EDO $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, donde $u^{(n)} = (u, u_1, \cdots, u_n)$, define una **hipersuperficie asociada a la ecuación** en $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$H_\Delta = \{(x, u, u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+2} : \Delta(x, u, u_1, \cdots, u_n) = 0\}.$$

Soluciones de una EDO

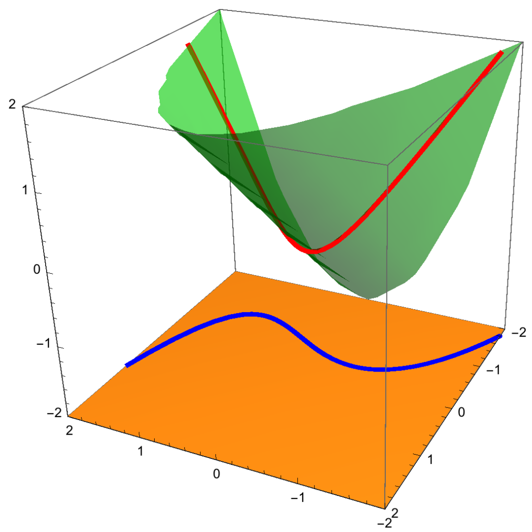


Figura 3: Una función g es solución de la ecuación $\Delta = 0$ si y sólo si:

$$\Gamma_{pr^{(n)}g} \subseteq H_{\Delta}.$$

Grupos de simetría

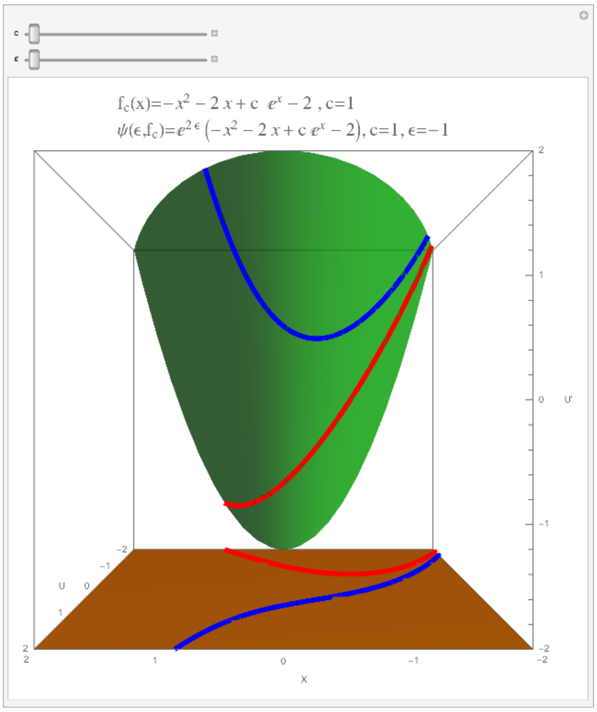
- $(\mathcal{U}, \psi)$ es **grupo de simetría** de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ si para cada solución g de la ecuación y para para cada $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_\epsilon(g)$ esté definida entonces $\psi_\epsilon(g)$ es solución de la ecuación.

Grupos de simetría

- $(\mathcal{U}, \psi)$ es **grupo de simetría** de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ si para cada solución g de la ecuación y para para cada $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_\epsilon(g)$ esté definida entonces $\psi_\epsilon(g)$ es solución de la ecuación.
- Una **simetría de Lie** de la ecuación es un generador infinitesimal $\mathbf{v}$ de cualquier grupo de simetría de la ecuación. Su forma será

$$\mathbf{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

Grupos de simetría



Determinación de grupos de simetría

- **Prolongación** ***n*****-ésima** de $(\mathcal{U}, \psi)$:

$$pr^{(n)}\psi\Big(\epsilon, \big(x, u^{(n)}\big)\Big) = \big(\tilde{x}, \psi_\epsilon(g)(\tilde{x}), \psi'_\epsilon(g)(\tilde{x}), \cdots, \psi_\epsilon^{n)}(g)(\tilde{x})\big).$$

Determinación de grupos de simetría

- **Prolongación n-ésima** de $(\mathcal{U}, \psi)$:

$$pr^{(n)}\psi\Big(\epsilon, \big(x, u^{(n)}\big)\Big) = \big(\tilde{x}, \psi_\epsilon(g)(\tilde{x}), \psi'_\epsilon(g)(\tilde{x}), \cdots, \psi_\epsilon^{n)}(g)(\tilde{x})\big).$$

- **Prolongación n-ésima** de $\mathbf{v} = \xi(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$:

$$\mathbf{v}^{(n)}(x, u^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} pr^{(n)}\psi\big(\epsilon, (x, u^{(n)})\big)\Big|_{\epsilon=0}.$$

Determinación de grupos de simetría

- **Prolongación** ***n*-ésima** de $(\mathcal{U}, \psi)$:

$$pr^{(n)}\psi\Big(\epsilon, \big(x, u^{(n)}\big)\Big) = \big(\tilde{x}, \psi_\epsilon(g)(\tilde{x}), \psi'_\epsilon(g)(\tilde{x}), \cdots, \psi^{n)}_\epsilon(g)(\tilde{x})\big).$$

- **Prolongación** ***n*-ésima** de $\mathbf{v} = \xi(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$:

Fórmula de Prolongación

$$\mathbf{v}^{(n)} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} \eta^{(k)}(x, u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_k} \text{ donde}$$

$$\eta^{(k)}(x, u^{(k)}) = D_x(\eta^{(k-1)}) - D_x(\xi)u_{k+1}.$$

Determinación de grupos de simetría

- **Prolongación** ***n*****-ésima** de $(\mathcal{U}, \psi)$:

$$pr^{(n)}\psi\Big(\epsilon, \big(x, u^{(n)}\big)\Big) = \big(\tilde{x}, \psi_\epsilon(g)(\tilde{x}), \psi'_\epsilon(g)(\tilde{x}), \cdots, \psi_\epsilon^{n)}(g)(\tilde{x})\big).$$

- **Prolongación** ***n*****-ésima** de $\mathbf{v} = \xi(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$:

Fórmula de Prolongación

$$\mathbf{v}^{(n)} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} \eta^{(k)}(x, u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_k} \text{ donde}$$

$$\eta^{(k)}(x, u^{(k)}) = D_x(\eta^{(k-1)}) - D_x(\xi)u_{k+1}.$$

Caracterización

$$\boxed{[\mathbf{v}^{(n)}, D_x] = -(D_x(\xi))D_x}$$

Criterio de invariancia

$(\mathcal{U}, \psi)$ es **grupo de simetría** de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ si

$$\boxed{\mathbf{v}^{(n)}\left(\Delta(x, u^{(n)})\right) = 0 \text{ cuando } \Delta(x, u^{(n)}) = 0}$$

para cada generador infinitesimal $\mathbf{v} = \xi(x, u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\dfrac{\partial}{\partial u}$ del grupo de simetría.

Criterio de invariancia

$(\mathcal{U}, \psi)$ es **grupo de simetría** de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ si

$$\boxed{\mathbf{v}^{(n)}\left(\Delta(x, u^{(n)})\right) = 0 \text{ cuando } \Delta(x, u^{(n)}) = 0}$$

para cada generador infinitesimal $\mathbf{v} = \xi(x, u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\dfrac{\partial}{\partial u}$ del grupo de simetría.

Caracterización

$$\boxed{[\mathbf{v}^{(n-1)}, \mathbf{A}] = -(\mathbf{A}(\xi))\mathbf{A}}$$

donde $\mathbf{A} = D_x \quad \text{mod.} \quad \Delta(x, u^{(n)}) = 0$

Criterio de invariancia

$(\mathcal{U}, \psi)$ es **grupo de simetría** de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ si

$$\boxed{\mathbf{v}^{(n)}\left(\Delta(x, u^{(n)})\right) = 0 \text{ cuando } \Delta(x, u^{(n)}) = 0}$$

para cada generador infinitesimal $\mathbf{v} = \xi(x, u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\dfrac{\partial}{\partial u}$ del grupo de simetría.

Caracterización

$$\boxed{[\mathbf{v}^{(n-1)}, \mathbf{A}] = -(\mathbf{A}(\xi))\mathbf{A}}$$

donde $\mathbf{A} = D_x \quad \text{mod.} \quad \Delta(x, u^{(n)}) = 0$

Sistema de ecuaciones determinantes para $\xi = \xi(x, u)$ y $\eta = \eta(x, u)$.

Integración por cuadratura $(n = 1)$

Ecuación determinante para $u_x = f(x, u)$:

$$\boxed{\xi \cdot (f_x) + \eta \cdot (f_u) = \eta_x + \big(\eta_u - \xi_x\big) f - \xi_u f^2}$$

- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x, u)\partial x + \eta(x, u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(1)} = \partial_\alpha \\ u_x = f(x, u) \Rightarrow \alpha_y = g(y) \end{cases}}$$

INTEGRACIÓN POR CUADRATURA $(n = 1)$

Ecuación determinante para $u_x = f(x, u)$:

$$\boxed{\xi \cdot (f_x) + \eta \cdot (f_u) = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)f - \xi_u f^2}$$

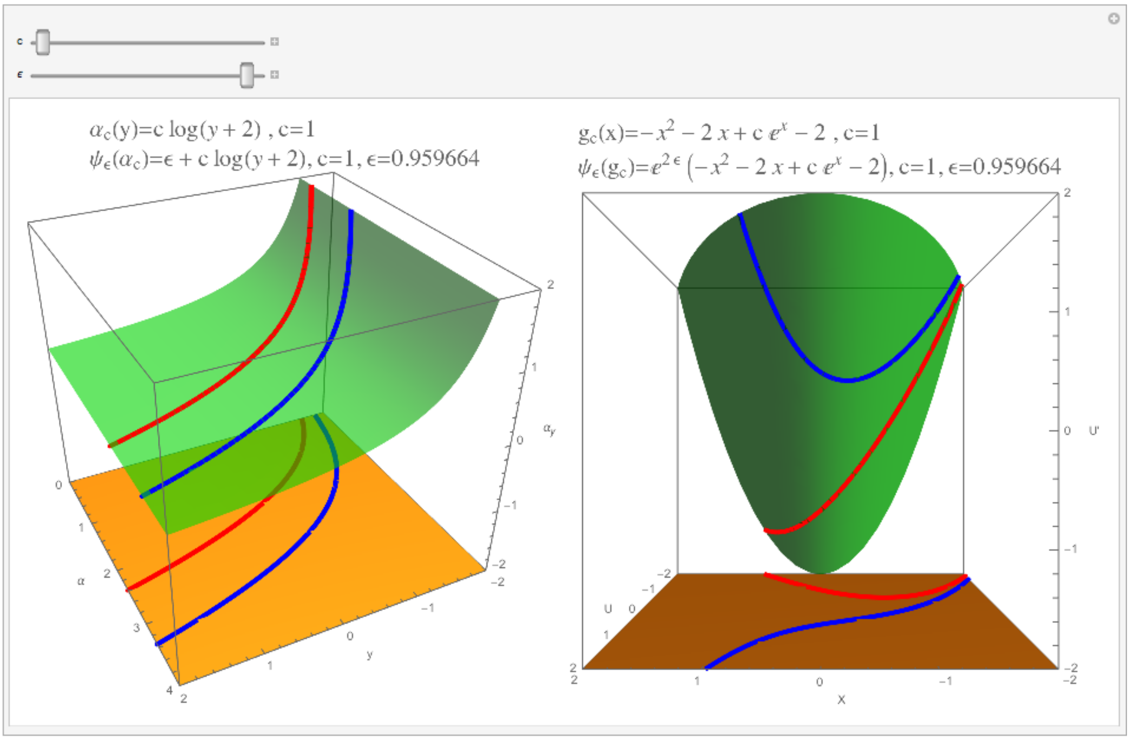
- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x, u)\partial x + \eta(x, u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(1)} = \partial_\alpha \\ u_x = f(x, u) \Rightarrow \alpha_y = g(y) \end{cases}}$$

- **Factor integrante:** $\boxed{\mu(x, u) = \dfrac{1}{\eta - \xi \cdot f}}$

$$\mu \cdot (u_x - f) = D_x(F(x, u)) = 0 \Rightarrow F(x, u) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Interpretación geométrica



Ecuaciones lineales

$$u_x = a(x)u + b(x)$$

Simetría de Lie: $\xi = 0, \eta_x = a(x)\eta$:

$$\mathbf{v} = \exp(A(x))\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

Ecuaciones lineales

$$u_x = a(x)u + b(x)$$

Simetría de Lie: $\xi = 0, \eta_x = a(x)\eta$:

$$\mathbf{v} = \exp(A(x))\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

- Coordenadas canónicas $y = x$, $\alpha = \exp(-A(x))u$. Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \exp(-A(y)) \cdot b(y)$$

Ecuaciones lineales

$$u_x = a(x)u + b(x)$$

Simetría de Lie: $\xi = 0, \eta_x = a(x)\eta$:

$$\mathbf{v} = \exp(A(x))\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

- Coordenadas canónicas $y = x$, $\alpha = \exp(-A(x))u$.
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \exp(-A(y)) \cdot b(y)$$

- Factor Integrante: $\mu(x) = \exp(-A(x))$

Ecuaciones de Bernoulli

$$u_x = a(x)u + b(x)u^n$$

Ecuación determinante

$$\xi = 0, \eta_x + \eta_u \left(a\left(x\right)u + b\left(x\right)u^n\right) - \eta\left(a\left(x\right) + b\left(x\right)u^{n-1}n\right) = 0$$

Ecuaciones de Bernoulli

$$u_x = a(x)u + b(x)u^n$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = \exp((1-n)A(x))u^n \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

Ecuaciones de Bernoulli

$$u_x = a(x)u + b(x)u^n$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = \exp((1-n)A(x))u^n \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

- Coordenadas canónicas $y = x$, $\alpha = \exp(A(x)(n-1))\frac{u^{1-n}}{1-n}$.
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \exp((n-1)A(y))b(y).$$

Ecuaciones de Bernoulli

$$u_x = a(x)u + b(x)u^n$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = \exp((1-n)A(x))u^n \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{donde} \quad A'(x) = a(x)$$

- Coordenadas canónicas $y = x$, $\alpha = \exp(A(x)(n-1))\frac{u^{1-n}}{1-n}$.
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)
  $$\alpha_y = \exp((n-1)A(y))b(y).$$
- Factor Integrante: $\mu(x,u) = \exp\left((n-1)A(x)\right)u^{-n}$

Ecuaciones homogéneas

$$u_x = f\left(\frac{u}{x}\right)$$

El grupo $(\mathbb{R}, \psi)$ definido por $\psi(x,u) = (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}u)$ es grupo de simetría. Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

Ecuaciones homogéneas

$$u_x = f\left(\frac{u}{x}\right)$$

El grupo $(\mathbb{R}, \psi)$ definido por $\psi(x,u) = (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}u)$ es grupo de simetría. Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = \frac{u}{x}$, $\alpha = \ln|x|$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{f(y) - y}$$

Ecuaciones homogéneas

$$u_x = f\left(\frac{u}{x}\right)$$

El grupo $(\mathbb{R}, \psi)$ definido por $\psi(x, u) = (e^\epsilon x, e^\epsilon u)$ es grupo de simetría. Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = \dfrac{u}{x}$, $\alpha = \ln|x|$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{f(y) - y}$$

- Factor Integrante $\mu(x, u) = \dfrac{1}{u - x \cdot f\left(\frac{u}{x}\right)}$

Otras ecuaciones

$$u_x = f(ax + bu + c);\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial u}$$

Otras ecuaciones

$$u_x = f(ax + bu + c);\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = ax + bu$, $\alpha = \dfrac{x}{b}$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{a + bf(by + c)}$$

Otras ecuaciones

$$u_x = f(ax + bu + c);\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = ax + bu$, $\alpha = \dfrac{x}{b}$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)
  $$\alpha_y = \frac{1}{a + bf(by + c)}$$
- Factor Integrante $\mu(x, u) = \dfrac{-1}{a + b \cdot f(ax + bu + c)}$

Ecuaciones de Riccati: un ejemplo

En algunos casos es posible determinar soluciones particulares de la ecuación determinante sin conocer una solución particular.

Ecuaciones de Riccati: un ejemplo

En algunos casos es posible determinar soluciones particulares de la ecuación determinante sin conocer una solución particular.

$$u_x = \frac{\beta}{x} u + \lambda\, u^2 + \frac{\nu}{x^2},$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \lambda, \beta, \nu \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones de Riccati: un ejemplo

En algunos casos es posible determinar soluciones particulares de la ecuación determinante sin conocer una solución particular.

$$u_x = \frac{\beta}{x} u + \lambda\, u^2 + \frac{\nu}{x^2},$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \lambda, \beta, \nu \in \mathbb{R}$$

- Coordenadas canónicas $y = u\, x$, $\alpha = -u$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{\lambda\, y^2 + (\beta+1)y + \nu}$$

Ecuaciones de Riccati: un ejemplo

En algunos casos es posible determinar soluciones particulares de la ecuación determinante sin conocer una solución particular.

$$u_x = \frac{\beta}{x} u + \lambda\, u^2 + \frac{\nu}{x^2},$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \lambda, \beta, \nu \in \mathbb{R}$$

- Coordenadas canónicas $y = u\,x$, $\alpha = -u$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{\lambda\, y^2 + (\beta+1)y + \nu}$$

- Factor Integrante $\mu(x,u) = \dfrac{x}{\lambda\, u^2 x^2 + (\beta+1)ux + \nu}$

Ecuaciones no clasificables

$$u_x = \frac{u^3 + x^2 u - u - x}{xu^2 + x^3 + u - x}$$

Ecuaciones no clasificables

$$u_x = \frac{u^3 + x^2 u - u - x}{xu^2 + x^3 + u - x}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}$$

Ecuaciones no clasificables

$$u_x = \frac{u^3 + x^2 u - u - x}{xu^2 + x^3 + u - x}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = u^2 + x^2$, $\alpha = \arctan\left(\frac{x}{u}\right)$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{2y(y-1)}$$

Ecuaciones no clasificables

$$u_x = \frac{u^3 + x^2 u - u - x}{xu^2 + x^3 + u - x}$$

Simetría de Lie:

$$\mathbf{v} = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}$$

- Coordenadas canónicas $y = u^2 + x^2$, $\alpha = \arctan\left(\frac{x}{u}\right)$
  Ecuación transformada (integrable por cuadratura)

$$\alpha_y = \frac{1}{2y(y-1)}$$

- Factor Integrante $\mu(x,u) = \dfrac{xu^2 + x^3 + u - x}{(u^2 + x^2)(u^2 + x^2 - 1)}$

Análisis del método de Lie ($n = 1$)

Ventajas:

- Método unificado frente a procedimientos de resolución diferentes para cada tipo de ecuación

Análisis del método de Lie ($n = 1$)

Ventajas:

- Método unificado frente a procedimientos de resolución diferentes para cada tipo de ecuación
- Válido para cualquier ecuación (no sólo las ecuaciones clásicas)

Análisis del método de Lie ($n = 1$)

Ventajas:

- Método unificado frente a procedimientos de resolución diferentes para cada tipo de ecuación
- Válido para cualquier ecuación (no sólo las ecuaciones clásicas)

Desventajas:

Análisis del método de Lie ($n = 1$)

Ventajas:

- Método unificado frente a procedimientos de resolución diferentes para cada tipo de ecuación
- Válido para cualquier ecuación (no sólo las ecuaciones clásicas)

Desventajas:

- Posible dificultad para encontrar alguna solución particular de la ecuación determinante

Ecuaciones de orden superior $(n > 1)$

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

Sistemas de ecuaciones determinantes para ξ, η

Ecuaciones de orden superior $(n > 1)$

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

Sistemas de ecuaciones determinantes para ξ, η

- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x,u)\partial x + \eta(x,u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(n)} = \partial_\alpha \\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}(y, \alpha^{(n)}) = 0 \end{cases}}$$

Ecuaciones de orden superior $(n > 1)$

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

Sistemas de ecuaciones determinantes para ξ, η

- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x,u)\partial x + \eta(x,u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(n)} = \partial_\alpha \\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}(y, \alpha^{(n)}) = 0 \end{cases}}$$

Por el criterio de invariancia, $\tilde{\Delta}$ no depende de α.

Ecuaciones de orden superior $(n > 1)$

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

Sistemas de ecuaciones determinantes para ξ, η

- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x,u)\partial x + \eta(x,u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(n)} = \partial_\alpha \\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}(y, \alpha^{(n)}) = 0 \end{cases}}$$

- **Reducción de orden:** $\boxed{w = \alpha_y}$

$$\tilde{\Delta}(y, w^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow w = G(y, C_1, \ldots, C_{n-1}), C_i \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones de orden superior $(n > 1)$

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

Sistemas de ecuaciones determinantes para ξ, η

- **Coordenadas canónicas** para $\mathbf{v} = \xi(x,u)\partial x + \eta(x,u)\partial u$:

$$\boxed{\mathbf{v}(y) = 0, \mathbf{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(n)} = \partial_\alpha \\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}(y, \alpha^{(n)}) = 0 \end{cases}}$$

- **Reducción de orden:** $\boxed{w = \alpha_y}$

$$\tilde{\Delta}(y, w^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow w = G(y, C_1, \ldots, C_{n-1}),\ C_i \in \mathbb{R}.$$

- **Recuperación de soluciones por cuadratura:**

$$\alpha_y = G(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
  - A. González-López 1988.
    Symmetries and integrability by quadratures of ordinary differential equations.
    Phys. Letters A **133** (4-5) 190-194

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$

P. J. Olver 1986.
Applications of Lie Groups to Differential Equations.
Springer-Verlag, New York

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$
- $4u^3 u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$

C. Muriel, J.L. Romero 2001.
New methods of reduction for ordinary differential equations.
IMA J. App. Math. **66** (2) 111-125

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$
- $4u^3 u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

E. L. Ince 1956.
Ordinary Differential Equations.
Dover Publications

Ecuaciones sin simetrías de Lie

Algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 sin simetrías de Lie

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$
- $4u^3 u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

Para resolverlas o para reducir su orden se precisan métodos más generales que el método de las simetrías de Lie

$\lambda-$Simetrías

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

λ–Simetrías

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

(V, λ) donde $V = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ y $\lambda(x, u, u_x)$

λ–Prolongaciones

$V^{[\lambda,(n)]} = V + \sum_{i=1}^{n} \eta^{[\lambda,(i)]}\frac{\partial}{\partial u_i}$ donde

$\eta^{[\lambda,(i)]} = (D_x + \lambda)\left(\eta^{[\lambda,(i-1)]}\right) - (D_x + \lambda)(\xi)u_i$

$\lambda-$Simetrías

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

(V, λ) donde $V = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ y $\lambda(x, u, u_x)$

$\lambda-$Prolongaciones

$V^{[\lambda,(n)]} = V + \sum_{i=1}^{n} \eta^{[\lambda,(i)]}\frac{\partial}{\partial u_i}$ donde

$\eta^{[\lambda,(i)]} = (D_x + \lambda)\left(\eta^{[\lambda,(i-1)]}\right) - (D_x + \lambda)(\xi)u_i$

$\lambda-$Simetrías

$V^{[\lambda,(n)]}(\Delta(x, u^{(n)})) = 0$ cuando $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

Algoritmo de reducción de orden

Si (V, λ) es una $\lambda -$ simetría de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

Algoritmo de reducción de orden

Si (V, λ) es una $\lambda-$simetría de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}$: $X = X(x, u), W = W(x, u, u_x)$

Algoritmo de reducción de orden

Si (V, λ) es una $\lambda -$ simetría de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}$: $X = X(x, u), W = W(x, u, u_x)$
- Invariantes de $V^{[\lambda,(n)]}$: $W_1 = \frac{D_x W}{D_x X}, \cdots, W_{n-1} = \frac{D_x W_{n-2}}{D_x X}$

Algoritmo de reducción de orden

$$\text{Si } (V,\lambda) \text{ es una } \lambda-\text{simetría de } \Delta(x,u^{(n)})=0$$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}: X = X(x,u), W = W(x,u,u_x)$
- Invariantes de $V^{[\lambda,(n)]}: W_1 = \frac{D_x W}{D_x X}, \cdots, W_{n-1} = \frac{D_x W_{n-2}}{D_x X}$
- Ecuación reducida: $\Delta_R(X, W^{(n-1)}) = 0$

Algoritmo de reducción de orden

Si (V, λ) es una $\lambda -$ simetría de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}$: $X = X(x,u), W = W(x,u,u_x)$
- Invariantes de $V^{[\lambda,(n)]}$: $W_1 = \frac{D_x W}{D_x X}, \cdots, W_{n-1} = \frac{D_x W_{n-2}}{D_x X}$
- Ecuación reducida: $\Delta_R(X, W^{(n-1)}) = 0$
- Ecuación auxiliar: $W(x,u,u_x) = G(X(x,u), C_1, \ldots, C_{n-1})$

Algoritmo de reducción de orden

$$\text{Si } (V, \lambda) \text{ es una } \lambda - \text{simetría de } \Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}$: $X = X(x, u), W = W(x, u, u_x)$
- Invariantes de $V^{[\lambda,(n)]}$: $W_1 = \frac{D_x W}{D_x X}, \cdots, W_{n-1} = \frac{D_x W_{n-2}}{D_x X}$
- Ecuación reducida: $\Delta_R(X, W^{(n-1)}) = 0$
- Ecuación auxiliar: $W(x, u, u_x) = G(X(x, u), C_1, \ldots, C_{n-1})$

C. Muriel, J.L. Romero 2001.
New methods of reduction for ordinary differential equations.
IMA J. App. Math. **66** (2) 111-125

Algoritmo de reducción de orden

$$\text{Si } (V,\lambda) \text{ es una } \lambda-\text{simetría de } \Delta(x,u^{(n)})=0$$

- Dos invariantes de $V^{[\lambda,(1)]}: X=X(x,u), W=W(x,u,u_x)$
- Invariantes de $V^{[\lambda,(n)]}: W_1=\frac{D_xW}{D_xX}, \cdots, W_{n-1}=\frac{D_xW_{n-2}}{D_xX}$
- Ecuación reducida: $\Delta_R(X,W^{(n-1)})=0$
- Ecuación auxiliar: $W(x,u,u_x)=G(X(x,u),C_1,\ldots,C_{n-1})$

Unificación y generalización de procesos de reducción

Válido para ecuaciones sin simetrías de Lie

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V},\lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1}$
- $u_{xx} = D_x((x+x^2)e^u)$
- $4u^3u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V}, \lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1} \Rightarrow (u\partial_u, pg(x)u^p)$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$
- $4u^3 u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V}, \lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1} \Rightarrow (u\partial_u, pg(x)u^p)$
- $u_{xx} = D_x((x+x^2)e^u) \Rightarrow (\partial_u, (x+x^2)e^u)$
- $4u^3 u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V}, \lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1} \Rightarrow (u\partial_u, pg(x)u^p)$
- $u_{xx} = D_x((x+x^2)e^u) \Rightarrow (\partial_u, (x+x^2)e^u)$
- $4u^3u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0 \Rightarrow \left(u\partial_u, \dfrac{x^2}{u}\right)$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V}, \lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1} \Rightarrow (u\partial_u, pg(x)u^p)$
- $u_{xx} = D_x((x+x^2)e^u) \Rightarrow (\partial_u, (x+x^2)e^u)$
- $4u^3u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0 \Rightarrow \left(u\partial_u, \dfrac{x^2}{u}\right)$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$
  $\Rightarrow \left(u\partial_u, uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}\right)$

Ecuaciones sin simetrías de Lie

$\lambda-$simetrías: $(\mathbf{V}, \lambda)$

- $u_{xx} = u^{-1}u_x^2 + ng(x)u^n u_x + g'(x)u^{n+1} \Rightarrow (u\partial_u, pg(x)u^p)$
- $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u) \Rightarrow (\partial_u, (x + x^2)e^u)$
- $4u^3u_{xx} + x^2 + 4u^4 + 2u^2 = 0 \Rightarrow \left(u\partial_u, \dfrac{x^2}{u}\right)$
- $u_{xx} = \dfrac{{u_x}^2}{u} + u_x(uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}) - s'(x) + q'(x)u^2$
  $\Rightarrow \left(u\partial_u, uq(x) + \dfrac{s(x)}{u}\right)$

Se resuelven o se reduce su orden en una unidad

λ–Simetrías y factores integrantes

- Ecuaciones de primer orden

Sophus Lie, (1874)

Equivalencia entre simetrías de Lie y factores integrantes

λ–Simetrías y factores integrantes

- Ecuaciones de primer orden

Sophus Lie, (1874)

Equivalencia entre simetrías de Lie y factores integrantes

- Ecuaciones de orden $n > 1$:

No hay equivalencia entre factores integrantes y simetrías de Lie

Ejemplo: $u_{xx} = D_x((x + x^2)e^u)$

- Factor integrante $\mu(x, u, u_x) = 1$.
- Carece de simetrías de Lie

$\lambda-$Simetrías y factores integrantes

- Ecuaciones de primer orden

Sophus Lie, (1874)

Equivalencia entre simetrías de Lie y factores integrantes

- Ecuaciones de orden $n > 1$:

No hay equivalencia entre factores integrantes y simetrías de Lie

Hay una equivalencia entre $\lambda-$simetrías y factores integrantes

$\lambda-$Simetrías $\Rightarrow$ Factores integrantes

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

Teorema

Si $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría de la ecuación entonces

$$\mu(x, u, u_x) = H_w(x, u, w(x, u, u_x)) \cdot w_{u_x}(x, u, u_x)$$

es un factor integrante donde

- $w(x, u, u_x)$ es un invariante de primer orden de $V^{[\lambda,(1)]}$
- $H(x, w)$ es una integral primera de la ecuación reducida (de orden 1).

$\lambda-$Simetrías $\Rightarrow$ Factores integrantes

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

Teorema

Si $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría de la ecuación entonces

$$\mu(x, u, u_x) = H_w(x, u, w(x, u, u_x)) \cdot w_{u_x}(x, u, u_x)$$

es un factor integrante donde

- $w(x, u, u_x)$ es un invariante de primer orden de $V^{[\lambda,(1)]}$
- $H(x, w)$ es una integral primera de la ecuación reducida (de orden 1).

Algoritmo para calcular factores integrantes usando $\lambda-$simetrías

Uso de $\lambda-$simetrías para hallar factores integrantes $(n = 2)$

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

1. Solución particular $\lambda(x, u, u_x)$ la EDP cuasi-lineal

$$\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$$

Uso de $\lambda-$simetrías para hallar factores integrantes $(n = 2)$

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

1. Solución particular $\lambda(x, u, u_x)$ la EDP cuasi-lineal

$$\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$$

2. Una solución particular $w(x, u, u_x)$ de la EDP lineal

$$w_u + w_{u_x}\lambda(x, u, u_x) = 0$$

Uso de λ–simetrías para hallar factores integrantes $(n = 2)$

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

1. Solución particular $\lambda(x, u, u_x)$ la EDP cuasi-lineal

$$\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$$

2. Una solución particular $w(x, u, u_x)$ de la EDP lineal

$$w_u + w_{u_x}\lambda(x, u, u_x) = 0$$

3. Integral primera $H(x, w)$ de la EDO reducida de orden 1

Uso de $\lambda-$simetrías para hallar factores integrantes $(n = 2)$

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

1. Solución particular $\lambda(x, u, u_x)$ la EDP cuasi-lineal

$$\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$$

2. Una solución particular $w(x, u, u_x)$ de la EDP lineal

$$w_u + w_{u_x}\lambda(x, u, u_x) = 0$$

3. Integral primera $H(x, w)$ de la EDO reducida de orden 1

Factor integrante: $\mu(x, u, u_x) = H_w \cdot w_{u_x}$

Uso de $\lambda-$simetrías para hallar factores integrantes $(n = 2)$

$$u_{xx} = M(x, u, u_x)$$

1. Solución particular $\lambda(x, u, u_x)$ la EDP cuasi-lineal

$$\lambda_x + u_x \lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$$

2. Una solución particular $w(x, u, u_x)$ de la EDP lineal

$$w_u + w_{u_x}\lambda(x, u, u_x) = 0$$

3. Integral primera $H(x, w)$ de la EDO reducida de orden 1

Factor integrante: $\mu(x, u, u_x) = H_w \cdot w_{u_x}$
Integral primera: $D_x(H(x, w(x, u, u_x))) = 0$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x \lambda_u + M \lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x} \lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u) u_x + \beta(x, u)$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x \lambda_u + M \lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x} \lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u) u_x + \beta(x, u)$

Ec 1: $\beta(x,u)^2 - u\beta(x,u) - \dfrac{x\beta(x,u)}{u} - \alpha(x,u) + \beta_x(x,u) = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + 2\alpha(x,u)\beta(x,u) - \dfrac{2\beta(x,u)}{u} + \beta_u(x,u) + \alpha_x(x,u) - 1 = 0$

Ec 3: $\alpha(x,u)^2 - \dfrac{\alpha(x,u)}{u} + \alpha_u(x,u) + \dfrac{1}{u^2} = 0$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$

$$\lambda(x,u,u_x) = \alpha(x,u)u_x + \beta(x,u)$$

Ec 1: $\beta(x,u)^2 - u\beta(x,u) - \dfrac{x\beta(x,u)}{u} - \alpha(x,u) + \beta_x(x,u) = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + 2\alpha(x,u)\beta(x,u) - \dfrac{2\beta(x,u)}{u} + \beta_u(x,u) + \alpha_x(x,u) - 1 = 0$

Ec 3: $\alpha(x,u)^2 - \dfrac{\alpha(x,u)}{u} + \alpha_u(x,u) + \dfrac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow \alpha(x,u) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x \lambda_u + M \lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x} \lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u) u_x + \beta(x, u)$

Ec 1: $\beta(x, u)^2 - u\beta(x, u) - \dfrac{x\beta(x, u)}{u} + \beta_x(x, u) - \dfrac{1}{u} = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + \beta_u(x, u) - 1 = 0$

Ec 3: $\alpha(x, u)^2 - \dfrac{\alpha(x, u)}{u} + \alpha_u(x, u) + \dfrac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow \alpha(x, u) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u)u_x + \beta(x, u)$

Ec 1: $\beta(x,u)^2 - u\beta(x,u) - \dfrac{x\beta(x,u)}{u} + \beta_x(x,u) - \dfrac{1}{u} = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + \beta_u(x,u) - 1 = 0 \Rightarrow \beta(x,u) = u + \dfrac{x}{u} + \gamma(x)$

Ec 3: $\alpha(x,u)^2 - \dfrac{\alpha(x,u)}{u} + \alpha_u(x,u) + \dfrac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow \alpha(x,u) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u)u_x + \beta(x, u)$

Ec 1: $\gamma(x)^2 + u\gamma(x) + \dfrac{x\gamma(x)}{u} + \gamma'(x) = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + \beta_u(x, u) - 1 = 0 \Rightarrow \beta(x, u) = u + \dfrac{x}{u} + \gamma(x)$

Ec 3: $\alpha(x, u)^2 - \dfrac{\alpha(x, u)}{u} + \alpha_u(x, u) + \dfrac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow \alpha(x, u) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $\lambda_x + u_x\lambda_u + M\lambda_{u_x} = M_u + M_{u_x}\lambda - \lambda^2$

   $\lambda(x, u, u_x) = \alpha(x, u)u_x + \beta(x, u)$

Ec 1: $\gamma(x)^2 + u\gamma(x) + \dfrac{x\gamma(x)}{u} + \gamma'(x) = 0 \Rightarrow \gamma(x) = 0$

Ec 2: $\dfrac{x}{u^2} + \beta_u(x, u) - 1 = 0 \Rightarrow \beta(x, u) = u + \dfrac{x}{u} + \gamma(x)$

Ec 3: $\alpha(x, u)^2 - \dfrac{\alpha(x, u)}{u} + \alpha_u(x, u) + \dfrac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow \alpha(x, u) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w_u + w_{u_x}\lambda(x, u, u_x) = 0$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0 \Rightarrow$ Integral primera: $H(x, w) = w$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x,u,u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x,u,u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0 \Rightarrow$ Integral primera: $H(x,w) = w$

Factor integrante: $\mu(x,u,u_x) = H_w \cdot w_{u_x}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0 \Rightarrow$ Integral primera: $H(x, w) = w$

Factor integrante: $\mu(x, u, u_x) = \dfrac{1}{u}$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0 \Rightarrow$ Integral primera: $H(x, w) = w$

Factor integrante: $\mu(x, u, u_x) = \dfrac{1}{u}$
Forma conservativa: $D_x(H(x, w)) = 0$

Ec. de Painlevé (sin simetrías de Lie)

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} + \left(u + \frac{x}{u}\right) u_x - 1$$

1. $V = \partial_u$ es una $\lambda-$simetría para $\lambda(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} + u + \dfrac{x}{u}$
2. $w(x, u, u_x) = \dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}$ es un invariante de $V^{[\lambda,(1)]}$
3. Ecuación reducida: $w_x = 0 \Rightarrow$ Integral primera: $H(x, w) = w$

Factor integrante: $\mu(x, u, u_x) = \dfrac{1}{u}$

Forma conservativa: $D_x\left(\dfrac{u_x}{u} - u + \dfrac{x}{u}\right) = 0$

λ–Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie

C Muriel and J L Romero.
C^∞-Symmetries and reduction of equations without Lie point symmetries.
J Lie Theory, 13(1):167–188, 2003.

λ–Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes

λ–Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes

C Muriel and J L Romero.
First integrals, integrating factors and λ-symmetries of second-order differential equations.
J. Phys. A, 42(36):365207, 17, 2009.

S V Meleshko, S Moyo, C Muriel, J L Romero, P Guha and A G Choudhury.
On first integrals of second-order ordinary differential equations.
Journal of Engineering Mathematics, pages 1–14, 2013.

J Zhang and Y Li.
Symmetries and first integrals of differential equations.
Acta Applicandae Mathematicae, 103(2):147–159, 2008.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden $[v_1, v_2] = cv_1$:
  ▶ Si se utiliza v_1 para reducir $\Rightarrow$ v_2 se conserva
  ▶ Si se utiliza v_2 para reducir $\Rightarrow$ v_1 se pierde (Type I hidden symmetry)

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden

Type I hidden symmetries $\Rightarrow$ $\lambda-$simetrías

C Muriel and J L Romero.
$\mathcal{C}^{\infty}-$symmetries and nonlocal symmetries of exponential type.
IMA journal of applied mathematics, 72(2):191–205, 2007.

C Muriel and J L Romero.
C^{∞}-symmetries and non-solvable symmetry algebras.
IMA J Appl Math, 66(5):477–498, 2001.

C Muriel and J L Romero.
Integrability of equations admitting the nonsolvable symmetry algebra so$(3,\mathbb{R})$.
Stud Appl Math, 109(4):337–352, 2002.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO

$\lambda-$SIMETRÍAS: PRINCIPALES APLICACIONES

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
  - Último multiplicador de Jacobi y polinomios de Darboux

C Muriel and J L Romero.
The λ-symmetry reduction method and Jacobi Last Multipliers.
Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19(4):807–820, 2014.

R Mohanasubha, V K Chandrasekar, M Senthilvelan and M Lakshmanan.
Interplay of symmetries, null forms, Darboux polynomials, integrating factors and Jacobi Multipliers in integrable second-order differential equations.
Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 470(2163):20130656, 2014.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
  - Último multiplicador de Jacobi y polinomios de Darboux
  - Método de Prelle-Singer y extensiones

M Prelle and M Singer.
Elementary first integrals of differential equations.
Trans. Amer. Math. Soc., 279:215–229, 1983.

V K Chandrasekar, M Senthilvelan and M Lakshmanan.
Extended Prelle-Singer method and integrability/solvability of a class of nonlinear $n-$th order ordinary differential equations.
J. Non. Math. Phys., 12 Sub. 1:184–201, 2005.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
  - Último multiplicador de Jacobi y polinomios de Darboux
  - Método de Prelle-Singer y extensiones
  - Secuencias de ecuaciones. Cadenas de Riccati y de Abel.

C Muriel and J L Romero.
λ-symmetries of some chains of ordinary differential equations.
Nonlinear Analysis: Real World Applications, 16:191–201, 2014.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
- Clasificación de ecuaciones en términos de $\lambda-$simetrías

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
- Clasificación de ecuaciones en términos de $\lambda-$simetrías

C Muriel and J L Romero.
Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $A(t,x)\dot{x}+B(t,x)$.
J. Nonlinear Math. Phys., 16(suppl. 1):209–222, 2009.

C Muriel and J L Romero.
Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $C(t)+1/(A(t,x)\dot{x}+B(t,x))$.
J. Nonlinear Math. Phys., 6:237–250, 2011.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
- Clasificación de ecuaciones en términos de $\lambda-$simetrías
- Linealización de EDO: transformaciones no locales

$\lambda-$SIMETRÍAS: PRINCIPALES APLICACIONES

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
- Clasificación de ecuaciones en términos de $\lambda-$simetrías
- Linealización de EDO: transformaciones no locales

C Muriel and J L Romero.
Nonlocal transformations and linearization of second-order ordinary differential equations.
J. Phys. A, 43(43):434025, 13, 2010.

C Muriel and J L Romero.
A λ-symmetry-based method for the linearization and determination of first integrals of a family of second-order ordinary differential equations.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44(24):245201, 2011.

$\lambda-$Simetrías: principales aplicaciones

- Integración o reducción de orden de EDO que pueden carecer de simetrías de Lie
- Determinación de integrales primeras y factores integrantes
- Conservación de simetrías por reducciones sucesivas de orden
- Relaciones con otros estudios analíticos de EDO
- Clasificación de ecuaciones en términos de $\lambda-$simetrías
- Linealización de EDO: transformaciones no locales

A Y Al-Dweik, M T Mustafa, R A Mara'beh and F M Mahomed.
$\lambda-$symmetry criteria for linearization of second order ODEs via point transformations.
arXiv preprint arXiv:1303.3106, 2013.

M. T. Mustafa, A. Y. Al-Dweik, and R. Mara'beh,
On the linearization of second-order ordinary differential equations to the Laguerre form via generalized Sundman transformations.
SIGMA, vol. 9, article 41, 10 pages, 2013.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías

C Muriel, J L Romero.
C^∞-symmetries and integrability of ordinary differential equations.
In *Proceedings of the I Colloquium on Lie Theory and Applications (Vigo, 2000)*, volume 35 of *Colecc Congr*, pages 143–150. Univ Vigo, Vigo, 2002.

G Cicogna.
Reduction of systems of first-order differential equations via Λ-symmetries.
Phys. Lett. A, 372(20):3672–3677, 2008.

G Cicogna, G Gaeta and S Walcher.
A generalization of λ-symmetry reduction for systems of odes: σ-symmetries.
Journal of physics. A, Mathematical and theoretical, 45(35), 2012.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías
- Para EDP: $\mu-$simetrías

G Cicogna, G Gaeta and P Morando.
On the relation between standard and μ-symmetries for PDE's.
J. Phys. A: Math Gen., 37:9467–9486, 2004.

G Gaeta and Paola Morando.
On the geometry of $\lambda-$symmetries and PDE reduction.
J. Phys. A, 37(27):6955–6975, 2004.

G Gaeta.
Twisted symmetries of differential equations.
J. Nonlinear Math. Phys., 16:107–136, 2009.

P Morando.
Deformation of Lie derivative and μ-symmetries.
J. Phys. A, 40(38):11547–11559, 2007.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías
- Para EDP: $\mu-$simetrías
- Para sistemas dinámicos, hamiltonianos y lagrangianos

G Cicogna.
Λ-symmetries of dynamical systems, Hamiltonian and Lagrangian equations.
In *Group analysis of differential equations and integrable systems*, pages 47–60. Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia, 2011.

G Cicogna.
Symmetries of hamiltonian equations and $\lambda-$constants of motion.
Arxiv preprint arXiv:1004.0300, 2010.

G Cicogna.
On the connections between symmetries and conservation rules of dynamical systems.
Mathematical Methods in the Applied Sciences, 36(2):208–215, 2013.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías
- Para EDP: $\mu-$simetrías
- Para sistemas dinámicos, hamiltonianos y lagrangianos
- Otras generalizaciones: *Twisted symmetries* and $\sigma-$simetrías

G Gaeta.
Gauge fixing and twisted prolongations.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44(32):325203, 2011.

G Cicogna, G Gaeta and S Walcher.
Dynamical systems and σ-symmetries.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46(23):235204, 2013.

G Cicogna.
Generalized notions of symmetry of ODEs and reduction procedures.
Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías
- Para EDP: $\mu-$simetrías
- Para sistemas dinámicos, hamiltonianos y lagrangianos
- Otras generalizaciones: *Twisted symmetries* and $\sigma-$simetrías
- Para ecuaciones de Euler-Lagrange

C Muriel, J L Romero and P J Olver.
Variational C^{∞}-symmetries and Euler-Lagrange equations.
J. Differential Equations, 222(1):164–184, 2006.

G Cicogna and G Gaeta.
Noether theorem for μ-symmetries.
J. Phys. A, 40(39):11899–11921, 2007.

M Nadjafikhah and S Dodangeh.
Variational problems without having any non-trivial Lie variational symmetries.
arXiv preprint arXiv:1007.0452, 2010.

M Nadjafikhah, S Dodangeh and P Kabi-Nejad.
On the variational problems without having desired variational symmetries.
Journal of Mathematics, 2013, 2013.

Generalizaciones

- Para sistemas de EDO: $\Lambda-$simetrías
- Para EDP: $\mu-$simetrías
- Para sistemas dinámicos, hamiltonianos y lagrangianos
- Otras generalizaciones: *Twisted symmetries* and $\sigma-$simetrías
- Para ecuaciones de Euler-Lagrange
- Para ecuaciones en diferencias

D Levi and M A Rodríguez.
λ-symmetries for discrete equations.
J. Phys. A, 43(29):292001, 9, 2010.

D Levi, M C Nucci and M A Rodríguez.
λ-symmetries for the reduction of continuous and discrete equations.
Acta applicandae mathematicae, 122(1):311–321, 2012.

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías
2. Integración de EDO con un número insuficiente de simetrías de Lie o con álgebra de simetría no resoluble

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías
2. Integración de EDO con un número insuficiente de simetrías de Lie o con álgebra de simetría no resoluble
3. Integración por cuadraturas utilizado $\lambda-$simetrías. Relación con estructuras resolubles

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías
2. Integración de EDO con un número insuficiente de simetrías de Lie o con álgebra de simetría no resoluble
3. Integración por cuadraturas utilizado $\lambda-$simetrías. Relación con estructuras resolubles
4. $\lambda-$simetrías de ecuaciones de la Física e Ingeniería

A Bhuvaneswari, R A Kraenkel and M Senthilvelan.
Application of the λ-symmetries approach and time independent integral of the Modified Emden equation.
Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13(3):1102–1114, 2012.

E Yaşar.
λ-symmetries, nonlocal transformations and first integrals to a class of Painlevé–Gambier equations.
Mathematical Methods in the Applied Sciences, 35(6):684–692, 2012.

A Abdel Kader, A Latif and H M Nour.
Exact solutions of a third-order ODE from Thin Film Flow using λ-symmetry method.

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías
2. Integración de EDO con un número insuficiente de simetrías de Lie o con álgebra de simetría no resoluble
3. Integración por cuadraturas utilizado $\lambda-$simetrías. Relación con estructuras resolubles
4. $\lambda-$simetrías de ecuaciones de la Física e Ingeniería
5. Estructura de las $\lambda-$simetrías de una ecuación

Algunos problemas abiertos

1. Reducciones de orden sucesivas utilizando $\lambda-$simetrías
2. Integración de EDO con un número insuficiente de simetrías de Lie o con álgebra de simetría no resoluble
3. Integración por cuadraturas utilizado $\lambda-$simetrías. Relación con estructuras resolubles
4. $\lambda-$simetrías de ecuaciones de la Física e Ingeniería
5. Estructura de las $\lambda-$simetrías de una ecuación
6. Programas de cálculo simbólico para el cálculo y aplicaciones de $\lambda-$simetrías

J Vidal, C Muriel, J L Romero and J J Alonso.
A Maple procedure based on $\lambda-$symmetries for second-order ordinary differential equations
Applied Mathematics and Computation, 249:147 - 163, 2014.

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie
3. Una generalización es la teoría de las $\lambda-$simetrías

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie
3. Una generalización es la teoría de las $\lambda-$simetrías
4. Teoría muy nueva con aplicaciones directas a la búsqueda de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie
3. Una generalización es la teoría de las $\lambda-$simetrías
4. Teoría muy nueva con aplicaciones directas a la búsqueda de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales
5. Problemas teóricos no resueltos

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie
3. Una generalización es la teoría de las $\lambda-$simetrías
4. Teoría muy nueva con aplicaciones directas a la búsqueda de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales
5. Problemas teóricos no resueltos
6. Programación de algoritmos con Maple

Consideraciones finales

1. La teoría de Lie unifica y generaliza procedimientos clásicos de integración de EDO
2. Necesita ser generalizada porque hay ecuaciones que carecen de simetrías de Lie
3. Una generalización es la teoría de las $\lambda-$simetrías
4. Teoría muy nueva con aplicaciones directas a la búsqueda de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales
5. Problemas teóricos no resueltos
6. Programación de algoritmos con Maple
7. Aplicaciones a ecuaciones concretas de la Física e Ingeniería