Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**)

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**)

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP.

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP. Por otro lado, en espacios reflexivos las dos propiedades son equivalentes ya que en estos espacios cada conjunto convexo, cerrado y acotado es w-compacto.

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP. Por otro lado, en espacios reflexivos las dos propiedades son equivalentes ya que en estos espacios cada conjunto convexo, cerrado y acotado es w-compacto.

Los espacios con la propiedad de Schur (convergencia débil de sucesiones implica convergencia en norma),

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP. Por otro lado, en espacios reflexivos las dos propiedades son equivalentes ya que en estos espacios cada conjunto convexo, cerrado y acotado es w-compacto.

Los espacios con la propiedad de Schur (convergencia débil de sucesiones implica convergencia en norma), como ℓ_1 o cualquiera de dimensión finita,

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP. Por otro lado, en espacios reflexivos las dos propiedades son equivalentes ya que en estos espacios cada conjunto convexo, cerrado y acotado es w-compacto.

Los espacios con la propiedad de Schur (convergencia débil de sucesiones implica convergencia en norma), como ℓ_1 o cualquiera de dimensión finita, tienen de modo trivial la wFPP.

Definiciones

Sea X espacio normado. Se dice que X tiene:

- La propiedad del punto fijo (**FPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.
- La propiedad débil del punto fijo (**wFPP**) si para cada $C \subseteq X$ convexo, w-compacto y cada $T : C \to C$ no expansiva, T tiene punto fijo.

Recordemos que todo conjunto w-compacto es cerrado y acotado, por lo tanto FPP $\Rightarrow$ wFPP. Por otro lado, en espacios reflexivos las dos propiedades son equivalentes ya que en estos espacios cada conjunto convexo, cerrado y acotado es w-compacto.

Los espacios con la propiedad de Schur (convergencia débil de sucesiones implica convergencia en norma), como ℓ_1 o cualquiera de dimensión finita, tienen de modo trivial la wFPP.

Además se ha definido y estudiado, en espacios duales, la **w*-FPP**.

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Merece la pena observar la distinta naturaleza de ambas propiedades.

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Merece la pena observar la distinta naturaleza de ambas propiedades. Según su definición, la FPP depende de la métrica;

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Merece la pena observar la distinta naturaleza de ambas propiedades. Según su definición, la FPP depende de la métrica; en cambio, la reflexividad es un invariante isomórfico:

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Merece la pena observar la distinta naturaleza de ambas propiedades. Según su definición, la FPP depende de la métrica; en cambio, la reflexividad es un invariante isomórfico: Si se cambia la norma por otra equivalente, la reflexividad del espacio no varía.

Con esta terminología podemos enunciar las que fueron las dos principales conjeturas en teoría de punto fijo.

~~Conjetura~~ (1965?-2008 para $\Uparrow$; sigue abierta $\Downarrow$)

Sea X espacio de Banach. Son equivalentes:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene la FPP.*

Merece la pena observar la distinta naturaleza de ambas propiedades. Según su definición, la FPP depende de la métrica; en cambio, la reflexividad es un invariante isomórfico: Si se cambia la norma por otra equivalente, la reflexividad del espacio no varía.

~~Conjetura~~ (1965?-1981)

Todo espacio de Banach tiene la wFPP.

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Incluso…

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Incluso. . .

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea Hilbert entonces X tiene la FPP.

Hay versiones especialmente "sangrantes" de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Incluso. . .

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea Hilbert entonces X tiene la FPP.

Veremos a continuación contraejemplos a las dos conjeturas principales.

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Incluso...

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea Hilbert entonces X tiene la FPP.

Veremos a continuación contraejemplos a las dos conjeturas principales.

Esencialmente, el único ejemplo conocido de espacio de Banach sin la wFPP es el que sigue

Hay versiones especialmente “sangrantes” de $\Downarrow$ en la primera conjetura, a saber:

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea uniformemente convexo entonces X tiene la FPP.

Incluso. . .

Conjetura

Sea X espacio de Banach. Si se puede renormar X para que sea Hilbert entonces X tiene la FPP.

Veremos a continuación contraejemplos a las dos conjeturas principales.

Esencialmente, el único ejemplo conocido de espacio de Banach sin la wFPP es el que sigue (aunque, por supuesto, todo espacio de Banach que lo contenga fallará también la propiedad).

Ejemplo (Alspach, 1981)

En el espacio $L_1[0,1]$ consideramos el convexo, w-compacto

Ejemplo (Alspach, 1981)

En el espacio $L_1[0,1]$ consideramos el convexo, w-compacto

$$C = \left\{ f \in L_1[0,1] : \int_0^1 f = 1 \text{ y } 0 \leq f \leq 2 \text{ c.p.t} \right\}$$

Ejemplo (Alspach, 1981)

En el espacio $L_1[0,1]$ consideramos el convexo, w-compacto

$$C = \left\{ f \in L_1[0,1] : \int_0^1 f = 1 \text{ y } 0 \leq f \leq 2 \text{ c.p.t} \right\}$$

y si $T : C \to C$ es la "transformación del panadero", dada por

Ejemplo (Alspach, 1981)

En el espacio $L_1[0,1]$ consideramos el convexo, w-compacto

$$C = \left\{ f \in L_1[0,1] : \int_0^1 f = 1 \text{ y } 0 \leq f \leq 2 \text{ c.p.t} \right\}$$

y si $T : C \to C$ es la "transformación del panadero", dada por

$$Tf(t) = \begin{cases} \min\{2f(2t), 2\} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \max\{2f(2t-1) - 2, 0\} & \text{si } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Ejemplo (Alspach, 1981)

En el espacio $L_1[0,1]$ consideramos el convexo, w-compacto

$$C = \left\{ f \in L_1[0,1] : \int_0^1 f = 1 \text{ y } 0 \leq f \leq 2 \text{ c.p.t} \right\}$$

y si $T : C \to C$ es la "transformación del panadero", dada por

$$Tf(t) = \begin{cases} \min\{2f(2t), 2\} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \max\{2f(2t-1) - 2, 0\} & \text{si } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

entonces T carece de punto fijo.