Definición

Sea X espacio de Banach.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo**

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

$$\operatorname{diam}(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \qquad \text{para cada } y \in C$$

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

$$\mathrm{diam}(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \qquad \text{para cada } y \in C$$

y se dice que X tiene

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

$$\mathrm{diam}(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \qquad \text{para cada } y \in C$$

y se dice que X tiene

- **estructura normal** si todo convexo, cerrado y acotado que sea diametral debe ser unitario.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

$$\operatorname{diam}(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \qquad \text{para cada } y \in C$$

y se dice que X tiene

- **estructura normal** si todo convexo, cerrado y acotado que sea diametral debe ser unitario.
- **estructura w-normal** si todo convexo, w-compacto que sea diametral debe ser unitario.

Definición

Sea X espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ cumplen $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Definiciones

Sea X espacio de Banach. Un conjunto $C \subseteq X$ es **diametral** si cumple

$$\operatorname{diam}(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \qquad \text{para cada } y \in C$$

y se dice que X tiene

- **estructura normal** si todo convexo, cerrado y acotado que sea diametral debe ser unitario.
- **estructura w-normal** si todo convexo, w-compacto que sea diametral debe ser unitario.

Veamos un ejemplo sencillo (y no trivial) de lo anterior.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

- C es convexo, cerrado y acotado.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

- C es convexo, cerrado y acotado.
- $\operatorname{diam}(C) = 1$.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

- C es convexo, cerrado y acotado.
- $\operatorname{diam}(C) = 1$.
- Para cada $x \in C$, $\sup\{\|x - y\| : y \in C\} = 1$.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

- C es convexo, cerrado y acotado.
- $\operatorname{diam}(C) = 1$.
- Para cada $x \in C$, $\sup\{\|x - y\| : y \in C\} = 1$.

En particular, c_0 carece de estructura normal.

Ejemplo

Sea $X = c_0$ y consideremos $C = \{x \in B_X : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene

- C es convexo, cerrado y acotado.
- $\operatorname{diam}(C) = 1$.
- Para cada $x \in C$, $\sup\{\|x - y\| : y \in C\} = 1$.

En particular, c_0 carece de estructura normal.

Para los resultados de estabilidad que siguen, recordemos que los espacios ℓ_p con $p \in (1, +\infty)$ son todos uniformemente convexos.

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$.

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2.

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2. Si

$$d(X, \ell_2) < \sqrt{3} \cong 1.732$$

Si un espacio de Banach es isomorfo a un espacio clásico, ¿podemos afirmar que tiene la FPP?

Teorema (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_p para algún $p \in (1, +\infty)$. Si

$$d(X, \ell_p) < \left(1 + 2^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

entonces X tiene la FPP.

Corolario (Domínguez-Benavides, 1996)

Sea X un espacio de Banach isomorfo a ℓ_2. Si

$$d(X, \ell_2) < \sqrt{3} \cong 1.732$$

entonces X tiene la FPP.

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

$\sqrt{2}$	$\cong 1.414$	García Falset (1994)

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

$\sqrt{2}$	$\cong 1.414$	García Falset (1994)
$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

$\sqrt{2}$	$\cong 1.414$	García Falset (1994)
$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

$\sqrt{2}$	$\cong 1.414$	García Falset (1994)
$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)

El siguiente cuadro resume, en orden cronológico, algunos de los resultados en torno a la estabilidad en ℓ_2:

$\sqrt{2}$	$\cong 1.414$	García Falset (1994)
$\sqrt{3}$	$\cong 1.732$	Domínguez Benavides (1996)
$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\cong 1.847$	Jiménez Melado y Llorens Fuster (2000)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}$	$\cong 2.074$	Lin (1999)
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$	$\cong 2.135$	Mazcuñán (2006)

Contenido

Definición

Sea X un espacio normado complejo. Se dice que X es un JB^*-triple si existe una aplicación continua $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$, llamada triple producto en X, que va de X^3 en X y satisface:

Definición

Sea X un espacio normado complejo. Se dice que X es un JB^*-triple si existe una aplicación continua $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$, llamada triple producto en X, que va de X^3 en X y satisface:

- Es bilineal y simétrica con respecto a la primera y tercera componentes, y conjugado lineal en la segunda componente.
- $\|\{x,x,x\}\| = \|x\|^3$.
- Si para cada $x, y \in X$ definimos $L_{x,y} : X \to X$ por $L_{x,y}(z) = \{x,y,z\}$ entonces se tiene, si además $a, b, c \in X$,

$$L_{x,y}(\{a,b,c\}) = \{L_{x,y}(a), b, c\} - \{a, L_{y,x}(b), c\} + \{a, b, L_{x,y}(c)\}$$

- $\|e^{irL_{x,x}}\| = 1$ para cada $r \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.
- El espectro de $L_{x,x}$ está contenido en $[0, +\infty)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definición

Sea X un espacio normado complejo. Se dice que X es un JB^*-triple si existe una aplicación continua $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$, llamada triple producto en X, que va de X^3 en X y satisface:

- Es bilineal y simétrica con respecto a la primera y tercera componentes, y conjugado lineal en la segunda componente.
- $\|\{x,x,x\}\| = \|x\|^3$.
- Si para cada $x, y \in X$ definimos $L_{x,y} : X \to X$ por $L_{x,y}(z) = \{x, y, z\}$ entonces se tiene, si además $a, b, c \in X$,

$$L_{x,y}(\{a,b,c\}) = \{L_{x,y}(a), b, c\} - \{a, L_{y,x}(b), c\} + \{a, b, L_{x,y}(c)\}$$

- $\|e^{irL_{x,x}}\| = 1$ para cada $r \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.
- El espectro de $L_{x,x}$ está contenido en $[0, +\infty)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Los ejemplos más usuales de JB^*-triples son los espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ y los espacios de Hilbert.

Teorema (Becerra-Guerrero – R)

Sea X un espacio de Banach. Si X o X^* es un JB^*-triple, entonces equivalen:

Teorema (Becerra-Guerrero – R)

Sea X un espacio de Banach. Si X o X^* es un JB^*-triple, entonces equivalen:

1. *X es reflexivo.*

Teorema (Becerra-Guerrero – R)

Sea X un espacio de Banach. Si X o X^* es un JB^*-triple, entonces equivalen:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene estructura normal.*

Teorema (Becerra-Guerrero – R)

Sea X un espacio de Banach. Si X o X^* es un JB^*-triple, entonces equivalen:

1. *X es reflexivo.*
2. *X tiene estructura normal.*
3. *X tiene la FPP.*

Demostración (esbozo)

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*
  - *De dimensión finita.*

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*
  - *De dimensión finita.*
  - *De la forma $L(H, K)$, con H y K Hilbert, siendo el primero de dimensión infinita y el segundo de dimensión finita.*

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*
  - *De dimensión finita.*
  - *De la forma $L(H, K)$, con H y K Hilbert, siendo el primero de dimensión infinita y el segundo de dimensión finita.*
  - *$H \oplus_1 K$, con H y K como en el punto anterior.*

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*
  - *De dimensión finita.*
  - *De la forma $L(H, K)$, con H y K Hilbert, siendo el primero de dimensión infinita y el segundo de dimensión finita.*
  - *$H \oplus_1 K$, con H y K como en el punto anterior.*

  Se prueba que cada uno de los espacios anteriores tiene estructura normal, y de esto se deduce que el propio X debe tenerla.

Demostración (esbozo)

- *Si X es un JB^*-triple no reflexivo entonces tiene copia isométrica de c_0, el cual carece de la FPP y de estructura normal. Análogamente para X^* y ℓ_1.*
- *Si X es un JB^*-triple reflexivo entonces puede descomponerse como producto, para la norma del supremo, de un conjunto finito de espacios de Banach que son de alguno de estos tipos:*
  - *De dimensión finita.*
  - *De la forma $L(H, K)$, con H y K Hilbert, siendo el primero de dimensión infinita y el segundo de dimensión finita.*
  - *$H \oplus_1 K$, con H y K como en el punto anterior.*

  Se prueba que cada uno de los espacios anteriores tiene estructura normal, y de esto se deduce que el propio X debe tenerla. Análogamente para X^* un JB^*-triple reflexivo, considerándose entonces un producto para la norma $\| \ \|_1$.

ALSPACH, D. E., “A fixed point free nonexpansive map”, Proc. AMS. **82** (1981), no.3, 423–424.

AYERBE TOLEDANO, J. M., DOMÍNGUEZ BENAVIDES, T., LÓPEZ ACEDO, G., “Measures of noncompactness in metric fixed point theory. Operator Theory: Advances and Applications” **99**. Birkhäuser Verlag, Basel (1997).

BECERRA GUERRERO, J., RAMBLA-BARRENO, F., “The fixed point property in JB^*-triples and preduals of JBW^*-triples”, J. Math. Anal. Appl. **360** (2009), no. 1, 254–264.

BROWDER, F. E., “Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space”, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.

DOMÍNGUEZ BENAVIDES, T., “A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results”, Houston J. Math. **22** (1996), no. 4, 835–849.

- Domínguez Benavides, T., “A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property”, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), no. 2, 525–530.
- Göhde, D., “Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung”, Math. Nachr. **30** (1965), 251–258.
- Kirk, W. A., “A fixed point theorem for mappings which do not increase distances”, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.
- Lin, P. K., “Renorming of ℓ_1 and the fixed point property”, J. Math. Anal. Appl. **362** (2010), no. 2, 534–541.
- Mazcuñán Navarro, E. M., “Stability of the fixed point property in Hilbert spaces”, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (1) (2006), 129–138.